Un peu de logique - Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. n est pair.
2. n est impair.
3. n divise 1000.
4. n est une puissance de 2.
5. n est un carré.

Exercice 2. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$
2. $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$
3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$
4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier et donner leur négation à chaque fois.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

Exercice 4.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 2^{n+2} + 3$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n > 0$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
   Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n < 2$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = n^2 + n$.

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 5$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = 2^n + 3^n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = 1 + 2^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2^{n-1}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n^{-n}(u_1 + u_2^2 + u_3^3 + \cdots + u_n^n)$.
   Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 6.

1. Montrer par récurrence sur n que $n^2 > 4n + 3$ à partir d'un certain rang à déterminer.
2. Soient z et z' deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
   (b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction obtenue en dérivant successivement n fois f.
   Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{x^{n+1}}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.