

## Devoir sur temps libre 3

(À remettre le LUNDI 3 NOVEMBRE 2025)

**Exercice 1 (Une équation).**On cherche à résoudre l'équation  $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\arcsin(x)$ .On pose  $f : x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$  et  $g : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .
  - Dresser le tableau de variations de  $g$ .
  - En déduire l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
- Justifier que  $f$  est impaire.  
On étudie donc la fonction  $f$  sur  $D_f \cap [0, +\infty[$ .
- Montrer qu'il existe un réel  $a > 0$  tel que  $f$  est dérivable sur  $[0, a[$  et sur  $]a, 1[$ . Calculer ensuite  $f'$  et simplifier son expression.
- On pose  $\Delta : x \mapsto f(x) - 2\arcsin(x)$ .  
Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $\Delta$  puis son ensemble de dérivabilité.
- Montrer que  $\Delta$  est constante sur un intervalle  $I \subset D$  à préciser et calculer la valeur de cette constante.
- Donner une expression simple de  $\Delta(x)$  pour  $x \in ([0, +\infty[ \cap D) \setminus I$ .
- Conclure.

**Exercice 2 (Quelques sommes).**On fixe un entier naturel  $n$  non nul.

- On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g : x \mapsto (1+x)^n$ .
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , développer  $g(x)$  en utilisant la formule du binôme.
  - En déduire les valeurs de  $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  et  $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .
  - Déterminer  $g'$ , la dérivée de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  sous deux formes.
  - En déduire une expression simple de  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ .
- On pose  $S'_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$  et  $S'_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots$ .
  - Justifier que  $S'_1 + S'_2 = 2^n$  et  $S'_1 - S'_2 = 0$ .
  - En déduire les valeurs de  $S'_1$  et  $S'_2$ .
- On pose maintenant

$$R_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^n \binom{n}{k}$$

$$R_1 = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^n \binom{n}{k}$$

$$R_2 = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots = \sum_{\substack{k=0 \\ 3 \text{ divise } k}}^n \binom{n}{k}$$

On pose aussi  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

- Rappeler la valeur de  $1 + j + j^2$  en justifiant.
  - Déterminer  $j^k$  et  $j^{2k}$  en fonction de  $k \in \mathbb{N}$ .
  - Que vaut  $R_0 + R_1 + R_2$ ?
  - Justifier que  $(1+j)^n = R_0 + R_1 j + R_2 j^2$  et  $(1+j^2)^n = R_0 + R_1 j^2 + R_2 j$ .
  - En factorisant par l'angle moitié, montrer que  $(1+j)^n = e^{\frac{in\pi}{3}}$ .
  - En déduire, à l'aide de la question 3a que  $R_0 = \frac{1}{3} \left( 2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)$ .
- Comment pourrait-on calculer la somme  $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$ ?