Outils pour l'étude de fonctions - Exercices

I. Propriétés générales des fonctions

Exercice I.1. 1. Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ sur $[0,4]$. Tracer ensuite les graphes des fonctions $f(x)+2$, $f(x+2)$, $f(2x)$ et $2f(x)$.

2. Tracer sur $[-3,5]$ le graphe de la fonction f qui est 1-périodique et telle que : $\forall x\in[-1/2,1/2], f(x)=|x|$.
3. Tracer sur $[-3,5]$ le graphe de la fonction g qui est 2-périodique et telle que : $\forall x\in[-1,1], g(x)=x^2$.
4. Tracer sur $[-3,3]$ le graphe de la fonction h qui est 1-périodique et telle que : $\forall x\in[0,1[, h(x)=x$.

Exercice I.2. 1. Pour chaque couple de fonctions f et g, déterminer les ensembles de définition de $f\circ g$ et $g\circ f$ et les calculer :

(a) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2$; (b) $f(x)=x^2-2x+3$ et $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (c) $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=\ln(x)$

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h=u\circ v$:

(a) $h(x)=\sqrt{3x-1}$; (b) $h(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; (c) $h(x)=\dfrac{1}{x+7}$; (d) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$; (e) $h(x)=\mathrm{e}^{\cos x}$

Exercice I.3. Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?

1. $f : x\mapsto \sin(x)\,\mathrm{e}^x$
2. $g : x\mapsto \dfrac{2\cos(x)+2\sin(x)}{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice I.4. Soient $f,g\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.

1. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f+g$ est aussi monotone (resp. strictement monotone) de même monotonie.
2. Montrer que si f et g sont monotones de même monotonie et positives alors fg est aussi monotone de même monotonie. Donner un contre-exemple lorsque les deux fonctions ne sont pas positives.
3. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f\circ g$ est croissante (resp. strictement croissante).
4. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de monotonies contraires alors $f\circ g$ est décroissante (resp. strictement décroissante).

Exercice I.5. 1. Montrer que si f et g sont bornées, alors $f+g$ et fg sont bornées.

2. Si f et g sont deux fonctions majorées, fg est-elle majorée ?

Exercice I.6. 1. Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2. Soit $\omega\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g : t\mapsto\sin(\omega t)$ est périodique et déterminer sa période en fonction de ω.

Exercice I.7. Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

II. Calculs de dérivées

Exercice II.1. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f_1(x)=x^{\mathrm{e}}$
2. $f_2(t)=(at-1)\sin(7t+2)$
3. $f_3(u)=\dfrac{u}{u^2-\tau^2}$
4. $f_4(t)=\pi^t$
5. $f_5(x)=\sin^4 x$
6. $f_6(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+4}$
7. $f_7(t)=\ln\big((2t+1)(t^2+1)\big)$
8. $f_8(x)=\sqrt{x^2-6x-1}$
9. $f_9(t)=\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$
10. $f_{10}(x)=\tan(\cos(x))$
11. $f_{11}(x)=|x+1|^{\frac{1}{3}}$
12. $f_{12}(x)=x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$

Exercice II.2. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$, où a,b et c sont 3 réels. Déterminer a,b et c pour que $\mathscr{C}_f$ ait les propriétés suivantes :

- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0,5)$;
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

2. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on considère les fonctions $g_\lambda : x\mapsto\dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

(a) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des fonctions g_λ sont parallèles entre elles.

(b) Démontrer que les tangentes en 1 aux courbes des fonctions g_λ sont concourantes.

III. Limites

Exercice III.1. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x}$ | b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ | c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ | d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ | e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$

Exercice III.2. Pour chaque fonction f, vérifier que la droite d'équation donnée est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$:

1. $f(x) = \dfrac{-x^2+6x-5}{x-2}$, $y = -x+4$ en $\pm\infty$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$, $y = x+2$ en $+\infty$
3. $f(x) = 3x+1+\dfrac{\sin(5x)}{2x}$, $y = 3x+1$ en $+\infty$

IV. Bijections

Exercice IV.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. En déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de f.

Exercice IV.2. Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

1. $f_1(x) = 3x-5$
2. $f_2(x) = \sqrt{3}-x$
3. $f_3(x) = x^2-1$ sur $]-\infty, 0]$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{3x-2}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

Exercice IV.3. Soit $f : x \mapsto x^3+x+1$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(3)$.
3. Justifier que f^{-1} est croissante.

V. Fonctions usuelles

Exercice V.1. 1. Simplifier les expressions suivantes :

a) $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3}$
b) $(e^{x-2})^2$
c) $\ln\sqrt{e}$
d) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
e) $2\ln(e^3)$
f) $e^{3\ln(x)}$
g) $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$
h) $e^{\frac{1}{2}\ln x}$
i) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-2x}}\right)$
j) $\ln\left(\dfrac{1}{5}e^x\right)$
k) $\ln\sqrt{e^x}$
l) $\ln(e^2)+\ln\left(\dfrac{1}{e^4}\right)$
m) $\ln(2-\sqrt{3})+\ln(2+\sqrt{3})$
n) $4\ln\left(\dfrac{27}{\sqrt{12}}\right)-2\ln\left(\dfrac{\sqrt{18}}{16}\right)$
o) $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$
p) $\log_x(\log_x x^{x^y})$.

2. Résoudre les équations :

a) $\ln(x+11) = \ln(x+2)+\ln(x+3)$;
b) $e^{x-3}\cdot e^{2x+4} = e^5$;
c) $(e^{2x}-3)(e^{-x}+1) = 0$;
d) $e^{2x}-2e^x-3 = 0$;
e) $2^{x^3} = 3^{x^2}$;
f) $\mathrm{ch}(x) = 2$;
g) $4\,\mathrm{ch}(x)+2\,\mathrm{sh}(x)-4 = 0$.

Exercice V.2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes, puis déterminer une fonction u et un réel α tels que $f(x) = (u(x))^\alpha$.

1. $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$
6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$.

Exercice V.3. 1. Montrer que pour tout réels x et y, on a : $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.

2. Montrer que pour tout réels x et y, on a : $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
3. Pour tout réel x, on pose $t = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que :
   (a) $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$;
   (b) $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$;
   (c) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exercice V.4. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression de $\mathrm{argsh}(x)$ en fonction de x.

Exercice V.5. 1. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$.

   b) En substituant x par $\sqrt{x}$ dans l'inégalité précédente, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x+1$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{sh}(x) \geq x$.

Exercice V.6. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

a) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{x\ln x + \sqrt{x}}$

b) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3}$

c) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

d) $a = 0^+$ et $f(x) = x^2\ln(2x)$

e) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

f) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x - \mathrm{e}^x}{x+1}$

g) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x-1}{2x - (\ln x)^2}$

h) $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

i) $a = -\infty$ et $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x} - x$

j) $a = x_0 > 0$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$

k) $a = 4$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$

l) $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$

m) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x + \mathrm{e}^x)}{x}$

n) $a = +\infty$ et $f(x) = (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

o) $a = 1^+$ et $f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x))$

Exercice V.7. Soit $f : t \mapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice V.8. Soit f définie par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f et préciser les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
2. (a) Démontrer que $f'(x) = f(x)g(x)$ avec $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1}$.
   (b) Étudier les limites en $\pm\infty$ de g, ses variations. En déduire son signe.
   (c) En déduire les variations de f

Exercice V.9. Calculer :

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

e) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

f) $\arctan(-1)$

g) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

h) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

i) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

j) $\arccos\left(\cos\left(4\pi\right)\right)$

k) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

l) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

m) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

n) $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

o) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

p) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.

Exercice V.10. Calculer les dérivées des expressions suivantes, en précisant leurs domaines de définition :

a) $\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$

b) $\arcsin\frac{x}{3}$

c) $x^2\arctan x^2$

d) $\arctan\left(\sin(2x)\right)$

e) $\ln\left(\arctan(x^2)\right)$

f) $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

g) $\arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice V.11. Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives :
1. $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 2. $g(x) = \arccos(\cos x)$; 3. $h(x) = \arctan(\tan x)$.

Exercice V.12. 1. On veut démontrer que pour tout x dans $[-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer le résultat en étudiant la fonction $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

(b) Montrer le résultat en posant $x = \sin\theta$ pour un certain θ.

2. Démontrer que pour tout $x > 0$ (resp. $x < 0$), $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (resp. $-\frac{\pi}{2}$).

3. Montrer la relation suivante sur un intervalle à préciser : $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice V.13. 1. (a) Sur quel intervalle I est définie la fonction $x \mapsto \sin(\arccos x)$?

(b) Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. (a) Sur quel ensemble $\mathscr{D}$ la fonction $x \mapsto \tan(\arccos x)$ est-elle définie ?

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Résoudre l'équation $\arccos x = \arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3}$.

Exercice V.14. Résoudre les équations :

a) $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$

b) $2\arctan x + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$

c) *** $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{2}\right)$

d) $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

VI. Études de fonctions

Exercice VI.1. Étudier, puis tracer le graphe des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^2-2x-1}{x}$
2. $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\cos x}$
4. $f_4(x) = x\ln(x)$
5. $f_5(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
6. $f_6(x) = \left|2x^2-6x+\frac{11}{8}\right|$

VII. Indications - Solutions

Exercice I.1 : Application immédiate du cours.
Exercice I.2 :

1. (a) $f\circ g(x)=|x|$ sur $\mathbb{R}$ et $g\circ f(x)=x$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) $f\circ g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g\circ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) $f\circ g(x)=\ln(x)^2-2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g\circ f(x)=\ln(x^2-2)$ sur $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.
2. (a) $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=3x-1$
   (b) $u(x)=\sin(x)$ et $v(x)=x+\dfrac{\pi}{2}$
   (c) $u(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x+7$
   (d) $u(x)=\dfrac{x}{x+4}$ et $v(x)=x^2$
   (e) $u(x)=\mathrm{e}^x$ et $v(x)=\cos x$.

Exercice I.3 :

1. f n'est ni majorée ni minorée car $f(2\pi n+\pi/2)=\mathrm{e}^{2\pi n+\pi/2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et $f(2\pi n-\pi/2)=-\mathrm{e}^{2\pi n-\pi/2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$.
2. $1\le 1+\mathrm{e}^x$ et $|2\cos(x)+2\sin(x)|\le 4$, donc $\left|g(x)\right|\le 4$: g est bornée.

Exercice I.4 : Il faut distinguer les cas croissants/décroissants.

1. Faisons le cas où f et g sont croissantes et montrons alors que $f+g$ est croissante. Soient $x,y\in I$ avec $x\le y$. Comme f et g sont croissantes, $f(x)\le f(y)$ et $g(x)\le g(y)$. Comme $\le$ est compatible avec $+$, $f(x)+g(x)\le f(y)+g(y)$, autrement dit $(f+g)(x)\le(f+g)(y)$.
2. Faisons le cas où f et g sont décroissantes et montrons alors que fg est décroissante. Soient $x,y\in I$ avec $x\le y$. Comme f et g sont décroissantes, $f(x)\ge f(y)$ et $g(x)\ge g(y)$. Comme f et g sont positives, $f(x)g(x)\ge f(y)g(y)$, autrement dit $(fg)(x)\ge(fg)(y)$. Comme contre exemple, on peut prendre $f(x)=x$ et $g(x)=x$ qui sont croissantes sur $\mathbb{R}$. Le produit $(fg)(x)=x^2$ n'est pas monotone.
3. Faisons le cas où f et g sont croissantes et montrons alors que $f\circ g$ est croissante. Soient $x,y\in I$ avec $x\le y$. Comme f et g sont croissantes, $g(x)\le g(y)$ et $f(g(x))\le f(g(y))$, autrement dit $f\circ g(x)\le f\circ g(y)$.
4. idem.

Exercice I.5 :

1. Il existe M, M' tels que pour tout $x\in I$, $\left|f(x)\right|\le M$ et $\left|g(x)\right|\le M'$. Donc pour tout $x\in I$, $\left|f(x)g(x)\right|\le MM'$ et $\left|f(x)+g(x)\right|\le M+M'$.
2. Non, par exemple, $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=-\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$. Le signe est important!

Exercice I.6 :

1. Soient $x<y\le 0$. Alors $0\le -y<-x$, donc $f(-y)\le f(-x)$ par croissance, puis $f(y)\le f(x)$ par parité.
2. $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ c'est la pulsation.

Exercice I.7 : Soit f une fonction T-périodique croissante. Que dire des valeurs de $f(x)$, $f(x+T)$? Comparer ensuite $f(x)$, $f(x+T)$ et $f(y)$ pour $y\in[x,x+T]$. Conclure.
Exercice II.1 :

1. $f_1'(x)=\mathrm{e}\,x^{\mathrm{e}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $f_2'(t)=a\sin(7t+2)+7(at-1)\cos(7t+2)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3'(u)=-\dfrac{u^2+\tau^2}{(u^2-\tau^2)^2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm\tau\}$
4. $f_4'(t)=\ln(\pi)\pi^t$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5'(x)=4\cos(x)\sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6'(x)=\dfrac{-2x+3}{(x^2-3x+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f_7'(t)=\dfrac{2}{2t+1}+\dfrac{2t}{t^2+1}$ sur $]-1/2,+\infty[$
8. $f_8'(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x-1}}$ sur $]-\infty,3-\sqrt{10}[\cup]3+\sqrt{10},+\infty[$
9. $f_9'(x)=-\dfrac{4}{x^5}\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$
10. $f_{10}(x)=-\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$ sur $\mathbb{R}$
11. $f_{11}(x)=\dfrac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ sur $]-1,+\infty[$ et $=-\dfrac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ sur $]-\infty,-1[$
12. $f_{12}(x)=\left(1-\dfrac{1}{\ln^2(x)}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x)}}$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

Exercice II.2 :

1. - $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0,5)$ donne $f(0)=5$, donc $c=-10$;
   - comme $f'(x)=\dfrac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$, on trouve $b=-c/2=5$;
   - de même, on trouve $a=1$.
2. (a) Comme $g'_\lambda(x)=\dfrac{-x^2-2\lambda x+1}{(x^2+1)^2}$, on trouve $g'_\lambda(0)=1$.

   (b) L'équation de la tangente en 1 est $y=-\dfrac{\lambda}{2}x+\lambda+\dfrac{1}{2}$. En prenant $\lambda=0$ et $\lambda=2$, on trouve que ces deux tangentes se coupent en $(2,1/2)$. On vérifie ensuite que ce point est sur toutes les autres tangentes.

Exercice III.1 : On fait apparaître à chaque fois un taux d'accroissement :

1. $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{e^x-e^0}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\exp'(0)=1$.
2. $\dfrac{\sin(x)}{x}=\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\sin'(0)=1$.
3. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1}}{1+x-1}\xrightarrow[x\to0]{}\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$.
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{1+x-1}\xrightarrow[x\to0]{}\dfrac{1}{1}=1$.
5. $\dfrac{\tan(3x)}{x}=\dfrac{\tan(3x)-\tan(3\times0)}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}3(1+\tan^2(0))=3$.

Exercice III.2 : On calcule à chaque fois la limite lorsque $x\to+\infty$ de $f(x)-y$.

Exercice IV.1 :

1. Soit $y\in\mathbb{R}^*$. Il existe une unique solution à l'équation $\dfrac{1}{x}=y$ qui est $x=\dfrac{1}{y}$. Donc f est une bijection. Sa réciproque est elle-même !
2. La courbe représentative de f est symétrique par rapport à $y=x$.

Exercice IV.2 : On réalise un tableau de variations à chaque fois pour déterminer l'ensemble image de la fonction.

1. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $y=3x-5\iff x=\dfrac{1}{3}(y+5)$. $f_1^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}(x+5)$.
2. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $y=\sqrt{3}-x\iff x=\sqrt{3}-y$. $f_2^{-1}(x)=\sqrt{3}-x$.
3. $]-\infty,0]\to[-1,+\infty[$. $y=x^2-1\iff y+1=x^2\iff x=-\sqrt{y+1}$. $f_3^{-1}(x)=-\sqrt{y+1}$.
4. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}^*$. $y=\dfrac{1}{3x-2}\iff 3xy-2y=1\iff x=\dfrac{2y+1}{3y}$. $f_4^{-1}(x)=\dfrac{2x+1}{3x}$.
5. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. $y=\dfrac{3x+2}{2x-1}\iff 2xy-y=3x+2\iff x(2y-3)=y+2\iff x=\dfrac{y+2}{2y-3}$. $f_5^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2x-3}$.

Exercice IV.3 :

1. On utilise le TBM : f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$.
2. $f^{-1}(1)=0$ car $f(0)=1$ et $f^{-1}(3)=1$.
3. On peut justifier que f^{-1} est dérivable et trouver le signe de sa dérivée avec le TBM. Ou bien on prend $x\leq y$ et on remarque que $x=f(x')$, $y=f(y')$. Comme f est croissante, on a forcément $x'\leq y'$.

Exercice V.1 :

1. a) $e^2\times e^3\times\dfrac{1}{e^4}\times(e^{-2})^{-3}=e^7$

   b) $(e^{x-2})^2=e^{2x-4}$

   c) $\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$

   d) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1$

   e) $2\ln(e^3)=6$

   f) $e^{3\ln(x)}=x^3$

   g) $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)=-x$

   h) $e^{\frac{1}{2}\ln x}=\sqrt{x}$

   i) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-2x}}\right)=2x$

   j) $\ln\left(\dfrac{1}{5}e^x\right)=x-\ln(5)$

   k) $\ln\sqrt{e^x}=\dfrac{x}{2}$

   l) $\ln(e^2)+\ln\left(\dfrac{1}{e^4}\right)=-2$

   m) $\ln(2-\sqrt{3})+\ln(2+\sqrt{3})=0$

   n) $4\ln\left(\dfrac{27}{\sqrt{12}}\right)-2\ln\left(\dfrac{\sqrt{18}}{16}\right)=8\ln(3)+3\ln(2)$

   o) $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}=\ln x$

   p) $\log_x(\log_x x^{x^y})=y$.

2.

a) $S = \{1\}$;

b) $S = \{\frac{1 \pm \sqrt{35}}{2}\}$;

c) $S = \{\ln(3)/2\}$;

d) $S = \{\ln(3)\}$;

e) $S = \left\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$

f) $S = \{\ln(2 \pm \sqrt{3})\}$;

g) $S = \{0; -\ln(3)\}$.

Exercice V.2 :

1. $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$, $D_f = \mathbb{R}^+$ et $u(x) = x$, $\alpha = 3/2$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $D_f = \mathbb{R}$ et $u(x) = x^2+1$, $\alpha = -1$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$, $D_f = \mathbb{R}$ et $u(x) = x-1$, $\alpha = 5/3$
4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $D_f = \mathbb{R}_*^+$ et $u(x) = x$, $\alpha = -3/2$
5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$, $D_f = \mathbb{R}_*^+$ et $u(x) = x$, $\alpha = 5/4$
6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$, $D_f = \mathbb{R}^+$ et $u(x) = x$, $\alpha = 3/8$.

Exercice V.3 : On remplace les fonctions hyperboliques par des exponentielles partout.

Exercice V.4 : On utilise le TBM : sh est continue strictement croissante et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$. On résout $\mathrm{sh}(x) = y \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2y \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 2y\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = \mathrm{argsh}(y)$.

Exercice V.5 :

1. a) On pose $f(x) = x - 1 - \ln x$, définie pour tout $x > 0$. On démontre ensuite que $f(x) \geq 0$ en étudiant les variations de f.

   b) On substitue puis on divise par x, en se rappelant que $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

2. (a) Même principe que les questions précédentes.

   (b) La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x$ qui est positive !

3. On peut utiliser $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ pour la première inégalité, puis on étudie la fonction $x \mapsto \mathrm{sh}(x) - x$ pour la deuxième.

Exercice V.6 :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x\ln x + \sqrt{x}} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln(2x) = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - \mathrm{e}^x}{x+1} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x - (\ln x)^2} = \frac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} - x = +\infty$

j) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

k) $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{3}{2}$

l) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} = -1$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3x^2-2}{x}} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\mathrm{e}^x)}{x} = 1$

o) $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$

Exercice V.7 : Soit $f : t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

1. $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. $\lim\limits_{t\to-1} f(x) = 0$ (croissances comparées), $\lim\limits_{t\to0} f(t) = 1$ (limite du taux d'accroissement), $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
3. f est dérivable sur D_f, et $f'(t) = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \geq 0$. Donc f est croissante.

Exercice V.8 :

1. $\mathscr{D} =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}$, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}$.
2. (a) Dériver l'expression $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$.

(b) $g'(x) = -\dfrac{1}{x(x-1)^2}$, g est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, donc g est positive sur $\mathscr{D}$.

(c) f et g sont positives, donc f est croissante.

Exercice V.9 :

a) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

b) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

c) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

d) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

e) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

f) $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

g) $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

h) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

i) $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{1}{3}$

j) $\arccos(\cos(4\pi)) = 0$

k) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{\pi}{3}$

l) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

m) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

n) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

o) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

p) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Exercice V.10 :

a) $\arcsin\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0,1[$

b) $\arcsin\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ sur $]-3,3[$

c) $x^2\arctan x^2 = \dfrac{2x^3}{1+x^4} + 2x\arctan(x^2)$ sur $\mathbb{R}$

d) $\arctan(\sin(2x)) = \dfrac{2\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}$ sur $\mathbb{R}$

e) $\ln\left(\arctan(x^2)\right) = \dfrac{2x}{(1+x^4)\arctan(x^2)}$ sur $\mathbb{R}^*$

f) $\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

g) $\arccos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice V.11 : Faire bien attention à l'intervalle où se trouve la variable.

Exercice V.12 :

1. $f'(x) = 0$ sur $]-1,1[$. Donc f est constante sur $]-1,1[$, égale à $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$. On vérifie ensuite que $f(1) = f(-1) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Comme $x \in [-1,1]$, prenons $\theta = \arcsin(x)$. On a $\sin\theta = x$. Comme $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin\theta) = \theta$. De plus, $\dfrac{\pi}{2} - \theta \in [0,\pi]$, donc $\arccos(\sin\theta) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. Donc $\arcsin x + \arccos x = \theta + \dfrac{\pi}{2} - \theta = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Posons $f(x) = \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}$. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $]-\infty, 0[$, égale à $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ et sur $]0,+\infty[$, égale à $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. On peut aussi poser $x = \tan\theta$ pour un certain $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, puis utiliser $\dfrac{1}{\tan\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.
4. Posons $f(x) = 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$ sur $]-1,1[$. $f'(x) = 0$, donc f est constante et vaut $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice V.13 :

1. (a) $I = [-1,1]$.

   (b) Voir le cours.
2. On utilise la formule $1 + \tan^2 x = \cos^2 x$. On obtient $\cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2(\arctan x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$. On fait ensuite attention aux signes.
3. (a) $\mathscr{D} = [-1,0[\cup]0,1]$.

   (b) On revient à la définition de $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ et on utilise les formules démontrées précédemment.
4. Rappelons que si $a, b \in [0,\pi]$, alors $a = b \iff \cos a = \cos b$. Or $\arccos x \in [0,\pi]$ et $0 \leq \arccos\dfrac{1}{2} + \arccos\dfrac{1}{3} \leq 2\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{2\pi}{3}$. On peut donc prendre le cos des deux côtés de l'équation, puis on linéarise $\cos(a+b)$ et on utilise les formules précédentes : $x = \cos\left(\arccos\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{4}}\dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$. $S = \left\{\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}\right\}$.

Exercice V.14 :

a) On prend la tangente des deux côtés, puis on résoud. On trouve deux solutions $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. La première est négative, donc $\arctan x_1 + \arctan 2x_1 < 0$: l'équation de départ n'est pas vérifée. Pour la deuxième, $\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq \theta = \arctan x_2 + \arctan 2x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ et $\tan\theta = 1$: x_2 est bien solution. $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

b) On remarque déjà que comme arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il n'y a qu'une seule solution. On prend le cosinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve deux solutions $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. On peut montrer que x_1 ne convient pas directement : $\arccos\frac{4}{5} < \frac{\pi}{4}$ car $\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $\arctan x_1 < -\frac{\pi}{4}$ car $x_1 < -1$. Donc $2\arctan x_1 + \arccos\frac{4}{5} < 0$. Puis, comme $0 \leq x_2 \leq 1$, $2\arctan x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; de plus $\arccos\frac{4}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\theta = 2\arctan x_2 + \arccos\frac{4}{5} \in [0,\pi]$ et $\cos(\theta) = 0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) On remarque déjà que si on change x en $-x$, on ne change pas l'équation. Donc si on a une solution x, son opposée $-x$ est aussi solution. On prend le sinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve trois solutions $x_0 = 0$, $x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{8}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{14}}{8}$. La première est bien solution. Comme $\arcsin 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il faut aussi avoir $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or $0 \geq x_1 \geq -\frac{1}{2}$ et $0 \geq x_1\sqrt{2} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \geq \arcsin x_1 + \arcsin x\sqrt{2} \geq -\frac{\pi}{2}$: x_1 est solution. D'autre part, $x_2 = -x_1$, donc x_2 est aussi solution. $S = \left\{0, \frac{-\sqrt{14}}{8}, \frac{\sqrt{14}}{8}\right\}$.

d) On prend le sinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve $[0,1]$ comme solutions. Pour vérifier les solutions, on prend $x \in [0,1]$ et $\theta = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$. $S = [0,1]$.

Exercice VI.1 :

1. Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$. $f_1(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$ est croissante sur les deux intervalles. Asymptote oblique $y = x-2$ en $\pm\infty$ et asymptote verticale en $x = 0$. $\lim_{x\to 0^\pm} f_1(x) = \mp\infty$.

2. Ensemble de définition : $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. f_2 est paire. $f_2'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ donc f est décroissante sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. $\lim_{x\to 1^\pm} f_2(x) = \pm\infty$. Asymptote horizontale $y = 1$.

3. Ensemble de définition : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. On a $f_3(x+2\pi) = f_3(x)$, et $f_3(-x) = f_3(x)$ donc on étudie f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f_3'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \leq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc f_3 est décroissante sur cet intervalle.

4. Ensemble de définition : $]0,+\infty[$. On a $f_4'(x) = \ln(x) + 1$, donc f_4 est décroissante sur $]0, 1/\mathrm{e}]$ et croissante sur $[1/\mathrm{e}, +\infty[$. $\lim_{x\to 0^+} f_4(x) = 0$ et la tangente est verticale.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > x$, donc f_5 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire donc on étudie sur $[0,+\infty[$. De plus, $f_5'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$, donc f_5 est décroissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to\pm\infty} f_5(x) = \mp\infty$.

6. On étudie $g(x) = 2x^2 - 6x + \frac{11}{8} = 2(x-3/2)^2 - \frac{25}{8}$ et s'annule en $\frac{1}{4}$ et $\frac{11}{4}$. On trace la parabole, puis on replie pour obtenir f_6.