Chapitre 5 : Sommes et produits

I. Manipulations de somme et de produits

I.1. Notations et exemples

Définition 1. Soit I un ensemble fini et non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. On note $\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\prod_{i\in I} a_i$) la somme (resp. le produit) de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
Si I est l'ensemble vide, on convient que $\sum_{i\in I} a_i$ vaut 0 et $\prod_{i\in I} a_i$ vaut 1.

Remarque I.1. L'indice i est muet et n'existe que dans la somme/le produit. On peut donc le remplacer par un autre symbole qui n'est pas utilisé ailleurs. Il n'apparaît pas forcément non plus dans la somme/le produit.

Notation I.1. Si $I = [\![p, q]\!]$, on notera alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = \sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{p\leq i\leq q} a_i.$$

Remarque I.2. Dans la somme $\sum_{k=p}^{q} a_k$, il y a .... termes.

Exemple I.1.

- La somme des n premiers entiers strictement positifs s'écrit :
- La somme des huit premières puissances de 2 s'écrit :
- $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} =$ ....
- Le produit $\prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times\cdots\times n$ se note aussi $n!$ et se lit « **factorielle** n ». On prend comme convention que $0! = 1$.

Exemple I.2. On a :

$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

$\sum_{j=1}^{n} j^2 =$

Mais : $\sum_{i=1}^{n} k^2 =$

Exercice 1. 1. Écrire chacune des expressions suivantes avec le signe $\sum$:

(a) $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 =$

(b) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} =$

(c) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 =$

(d) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_dx^d =$

(e) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 =$

(f) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} =$

(g) $2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12} =$

(h) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1024} =$

(i) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50 =$

(j) $q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 - \cdots + q^{31} =$

(k) $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} =$

2. Écrire chacune des expressions suivantes sans le signe $\sum$ ou $\prod$:
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 1 =$
   (b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2} =$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (-1)^k =$
   (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} a_{3k+1} =$
   (e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x =$
   (f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} =$
   (g) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} =$
   (h) $\displaystyle\frac{5!}{4!} =$
   (i) $\displaystyle\frac{n!}{k!(n-k)!} =$

I.2. Linéarité, relation de Chasles et autres propriétés

Exemple I.3.

- Lorsqu'on ajoute toujours le même nombre :

$$\sum_{k=1}^{n} a =$$

- Lorsqu'on sort un terme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{\dots}^{\dots} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{\dots}^{\dots} a_k$$

- Lorsque on somme une somme :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) =$$

- Lorsqu'on a un facteur commun :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i =$$

- Un télescopage :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) =$$

Proposition 1.

1. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a = a(q-p+1)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + \sum_{k=p+1}^{q} a_k$;
3. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k = a_q + \sum_{k=p}^{q-1} a_k$;
4. $\displaystyle\sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k = \sum_{k\in I} (a_k + b_k)$ *(linéarité)* ;
5. $\displaystyle\sum_{k\in I} \lambda a_k = \lambda \sum_{k\in I} a_k$ *(homogénéité)* ;
6. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$ *(téléscopage)* ;
7. $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k$ *(Chasles)* ;
8. $\displaystyle\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| \leq \sum_{k=p}^{q} |a_k|$ *(Inégalité triangulaire)*.

Proposition 2. *1.* $\prod_{k=p}^{q} a = a^{q-p+1}$;

2. $\prod_{k=p}^{q} a_k \prod_{k=p}^{q} b_k = \prod_{k=p}^{q} (a_k b_k)$;

3. $\prod_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k$;

4. $\prod_{k=p}^{q} (a_k)^m = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^m$;

5. $\left|\prod_{k=p}^{q} a_k\right| = \prod_{k=p}^{q} |a_k|$;

6. $\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$ *(téléscopage) ;*

7. $\prod_{k=p}^{q} a_k \times \prod_{k=q+1}^{r} a_k = \prod_{k=p}^{r} a_k$ *(Chasles).*

Exemple I.4.
- Le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ vaut :
- Le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$ vaut :

Exercice 2.
1. Calculer :

$$\sum_{i=1}^{9} i =$$
$$\sum_{i=1}^{9} 2i =$$
$$\sum_{k=1}^{9} (3k-5) =$$
$$\sum_{j=1}^{9} \frac{j}{2} =$$

2. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{4} 2^k =$$
$$\sum_{i=1}^{4} 3^i =$$
$$\sum_{j=1}^{4} (2^j + 3^j) =$$
$$\sum_{l=1}^{4} (2^{l+1} + 1) =$$

3. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{3} k =$$
$$\sum_{k=0}^{3} k^2 =$$
$$\left(\sum_{k=0}^{3} k\right)^2 =$$

4. Calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} =$$

I.3. Changement d'indice

Proposition 3. *Soient $p \leq q$ deux entiers naturels, $N \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On a*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N} \text{ et } \prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N}$$

et

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{q-k}$$

Exemple I.5. En pratique, on peut poser le changement d'indice pour ne pas se tromper.

- Pour modifier la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2$, on pose $i = k+1$. Alors lorsque $k = 0$, on a $i =$ .... et lorsque $k = n$, $i =$ ....
  Donc $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 =$ ....
- Considérons la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ et posons $i = n-k$. Lorsque $k = 0$, $i =$ ..... et lorsque $k = n$, $i =$ ...., de sorte que
  $\sum_{k=0}^{n} k =$ ....
  Donc $2\sum_{k=0}^{n} k =$ ....

Exercice 3. Compléter les expressions suivantes en terminant les changements d'indice :

1. $\sum_{k=2}^{5} a_k = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{5-i}$
2. $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{j=1}^{n+1} x_{\dots}$
3. $\sum_{k=p+1}^{q+1} a_k = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i+1}$
4. $\sum_{k=n+1}^{2n} x_k = \sum_{l=1}^{n} x_{\dots}$
5. $\sum_{i=3}^{n} u_{i+2} = \sum_{k=\dots}^{\dots} u_k$
6. $\sum_{j=3}^{n+2} u_{j+1} = \sum_{i=\dots}^{n} u_{\dots}$
7. $\sum_{k=4}^{n-1} a_k = \sum_{i=1}^{\dots} a_{\dots}$

Exercice 4. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} =$
2. $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) =$
3. $\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k =$
4. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) =$
5. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) =$
6. $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)}b^{k+1} =$