

Sommes et produits - Exercices

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Factoriser l'expression $a^{2m+1} + b^{2m+1}$ par $a + b$. Est-il possible de factoriser $a^{2m} + b^{2m}$ par $a + b$?

Exercice 2. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de la formule du binôme, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > -1$. On pose $a = x + 1$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 \geq n(a - 1)$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 3. 1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer la partie entière de $\sum_{k=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

4. Donner la valeur de $\sum_{k=10000}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ avec un erreur inférieure à $\frac{1}{50}$.

Exercice 4. Déterminer a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$, puis en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

En s'inspirant de la méthode précédente, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5. Calculer les sommes et produits :

$$1. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \quad \left| \quad 2. \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad \left| \quad 3. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \left| \quad 4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right.$$

Exercice 6. 1. On souhaite calculer la somme $S_1 = \sum_{k=1}^n k$ d'une façon différente de celle vue en cours en utilisant notamment $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$.

$$\text{tamment } S_2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

(a) Exprimer $\sum_{k=1}^n (k+1)^2$ de deux façons différentes en fonction de S_1 , S_2 et n .

(b) En déduire la valeur de S_1 .

2. En s'inspirant du 1, calculer S_2 puis $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \sum_{k=1}^n k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Démontrer par récurrence que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = (a_n)^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{k=0}^n k(k+1) & \left| \quad 3. \sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3) & \left| \quad 5. \sum_{k=0}^n \text{ch}(kx), (x \in \mathbb{R}) & \left| \quad 7. \sum_{k=0}^n (-1)^k k \right. \\ 2. \sum_{k=0}^n (2k+1) & \left| \quad 4. \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}} & \left| \quad 6. \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3 + (-1)^k} \right)^k & \right. \end{array}$$

Exercice 9. Soient n, p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer les relations :

$$\text{a) } \binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n} \binom{n}{p} \quad \text{b) } \binom{n+k}{k} \binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k} \binom{p+k}{k}$$

Exercice 10. Soit $n > 1$ un entier naturel. Exprimer le quotient $\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 11. Montrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interpréter le résultat sur le triangle de Pascal.

Exercice 12. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$;

d) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$. Simplifier $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n .
2. En déduire la valeur de S_n .

Exercice 15. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq m, n$.

1. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^{m+n}$?
2. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^n (1+x)^m$?
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$.

Exercice 16. 1. Linéariser les expressions suivantes : a) $\sin^3(x) \cos^3(x)$;

b) $\cos(x) \cos^2(2x)$

2. En déduire les valeurs des intégrales : a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cos^3(x) dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^2(2x) dx$

Exercice 17. Exprimer :

1. $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

2. $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 18. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$

3. $\sum_{k=0}^n \cos^3(k\theta)$

5. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

2. $\sum_{k=0}^n \cos(a+k\theta)$

4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

6. $\sum_{k=0}^n \sin(k\alpha) \sin(k\beta)$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (i+j)$

3. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(i, j)$

5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i j$

7. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$

2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$

4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

6. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j-1}$

Exercice 20. 1. Calculer : $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$.

2. Calculer : $\sum_{k=1}^n k 2^k$ en faisant apparaître une somme double.