Un peu de logique - Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. n est pair.
2. n est impair.
3. n divise 1000.
4. n est une puissance de 2.
5. n est un carré.

Exercice 2. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$
2. $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$
3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$
4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier et donner leur négation à chaque fois.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0.$

Exercice 4.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 2^{n+2} + 3$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n > 0$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
   Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n < 2$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = n^2 + n$.

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 5$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = 2^n + 3^n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Montrer par récurrence sur n que $u_n = 1 + 2^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
   Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2^{n-1}$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n^{-n}(u_1 + u_2^2 + u_3^3 + \cdots + u_n^n)$.
   Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 6.

1. Montrer par récurrence sur n que $n^2 > 4n + 3$ à partir d'un certain rang à déterminer.
2. Soient z et z' deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
   (b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction obtenue en dérivant successivement n fois f.
   Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}{x^{n+1}}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Indications - Solutions

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. n est pair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k$.
2. n est impair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k+1$.
3. n divise 1000 : $\exists k \in \mathbb{N} \mid kn = 1000$.
4. n est une puissance de 2 : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2^k$.
5. n est un carré : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = k^2$

Exercice 2 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$: vrai. Prenons $n \in \mathbb{N}$. On pose $p = n^2$ qui vérifie bien $p = n^2$.
2. $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$: faux. On montre que le contraire est vrai. Soit $p \in \mathbb{N}$. Prenons $n = p+2$. Alors $n > 1$ et $n > p$, donc $n^2 > p$.
3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$: faux. On montre le contraire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $p = n^2+1$. Alors $p > n^2$.
4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$: faux. Prenons $p = 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $n = 0$ ou $n = 1$ et alors $n^2 < p$, soit $n \geq 2$ et $n^2 \geq 4 > p$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq p$.

Exercice 3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$: FAUX, négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$: VRAI, négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$: FAUX, négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$: FAUX, négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$: FAUX, négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.

Exercice 4 :

1.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 7$ et $2^{0+2}+3 = 4+3 = 7$, donc la propriété est vérifiée.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n = 2^{n+2}+3$. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2(2^{n+2}+3) - 3 = 2^{n+3}+3$, donc la propriété est vérifiée au rang $n+1$.
2.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n > 0$. Alors $3u_n > 0$ et $1+2u_n > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.
3.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 < 2$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $0 < u_n < 2$. Alors $1 < u_n+1 < 3$, et $\sqrt{1} < \sqrt{u_n+1} < \sqrt{3}$ par stricte croissance de la racine carrée. Or $\sqrt{1} > 0$ et $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Donc $0 < u_{n+1} < 2$.
4.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = 0 = 0^2+0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = n^2+n$. Alors $u_{n+1} = u_n+2n+2 = n^2+n+2n+2 = (n+1)^2+n+1$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Exercice 5 : On procède par récurrence double pour les 3 premières et forte pour la dernière.

1.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2^0+3^0 = 2$. Pour $n = 1$, $u_1 = 5$ et $2^1+3^1 = 5$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = 2^n+3^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}+3^{n+1}$. Alors $u_{n+2} = 5(2^{n+1}+3^{n+1}) - 6(2^n+3^n) = (10-6)2^n + (15-6)3^n = 2^{n+2}+3^{n+2}$, donc la propriété est vraie au rang $n+2$.
2.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1+2^0 = 2$. Pour $n = 1$, $u_1 = 3$ et $1+2^1 = 3$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = 1+2^n$ et $u_{n+1} = 1+2^{n+1}$. Alors $u_{n+2} = 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) = 1+3\times 2^{n+1} - 2^{n+1} = 1+2^{n+1}$.
3.
   - Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = 1 \leq 2^{1-1} = 1$. Pour $n = 2$, $u_2 = 2 \leq 2^{2-1} = 2$.
   - Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $u_n \leq 2^{n-1}$ et $u_{n+1} \leq 2^n$. Alors $u_{n+2} \leq 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2+1) \leq 4\times 2^{n-1} = 2^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n+2$.
4.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 < u_0 = 1 \leq 1$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 < u_k \leq 1$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 < u_k^k \leq 1$, donc $0 < u_1+u_2^2+\cdots+u_n^n \leq n$, puis $0 < u_{n+1} \leq n^{-n-1}$. Comme $n \geq 1$, $-(n+1) \leq -2$ et $n^{-n-1} \leq 1^{-n-1} = 1$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Exercice 6 :

1.
   - Initialisation : Pour $n = 5$, $5^2 = 25$ et $4\times 5+3 = 23$, donc la propriété est vraie au rang 5.

- Hérédité : soit $n \geq 5$ et supposons que $n^2 > 4n+3$. Alors $(n+1)^2 = n^2+2n+1 > 4n+3+2n+1 = 4(n+1)+2n > 4(n+1)+3$, car $n \geq 5$. La propriété est vraie au rang $n+1$.

2. Voir le cours pour la première partie.
   - Initialisation : pour $n=0$, $\overline{z^0} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Alors $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n}\,\overline{z} = \overline{z}^n\overline{z} = \overline{z}^{n+1}$ en utilisant la question précédente et l'HR.
3. - Initialisation : Pour $n=1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = (-1)^1\dfrac{1}{x^{1+1}}$.
   - Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^n\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times 1}{x^{n+1}}$. En dérivant, on trouve : $f^{(n+1)}(x) = -(n+1)(-1)^n\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times 1}{x^{n+2}}$, ce qui donne la formule voulue.
4. - Initialisation : Pour $n=0$, on a $|\sin(0x)| = 0$ et $0\times|\sin(x)| = 0$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$. Alors $|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos(x)+\sin(x)\cos(nx)| \leq |\sin(nx)||\cos(x)|+|\sin(x)||\cos(nx)| \leq n|\sin(x)|+|\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$ en utilisant $|\cos(nx)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$.
5. - Initialisation : pour $n=0$, on prend $x \in [-1,+\infty[$. Alors $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$.
   - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que : $\forall x \in [-1,+\infty[$, $(1+x)^n \geq 1+nx$. Soit $x \in [-1,+\infty[$. Alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ car $1+x \geq 0$. Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$.