Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet A
Mercredi 8 octobre 2025

Question 1 (3 pts)

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   et $\forall x \in I, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
   La fonction arccos est dérivable sur $J =]-1, 1[$
   et $\forall x \in J, \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$
   La fonction arcsin est dérivable sur $K =]-1, 1[$
   et $\forall x \in K, \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question 2 (1pt)

$$\arctan\left(\tan\frac{17\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\arccos(\cos(4\pi)) = 0$$

$$\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

☐

Question 3 (2 pts)

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier ?
   On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire ?
   On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne. ☐

Question 4 (2 pts)

Vrai ou faux ? Justifier !

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 < 7$
   FAUX ! En effet, $x = 3 \in \mathbb{N}$ est un contre-exemple car $x^2 = 9 \geq 7$.
2. $\exists x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 = 0$
   VRAI ! En effet, $x = -\frac{2}{3}$ convient. ☐

Question 5 (2 pts)

Écrire avec des quantificateurs : il existe un entier naturel plus grand que tous les autres.
$\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$

Écrire la négation de : $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R} \mid y - x \leq 2$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid y - x > 2$ □

Question 6 (3 pts)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 3$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{3}{2} - \frac{3^1}{2} = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+2}}{2}$.

  On a $u_{n+1} = 3u_n - 3$, donc par HR, $u_{n+1} = 3\left(\frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}\right) - 3 = \frac{9}{2} - 3 - \frac{3^{n+2}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}$. La formule est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{2}$. □

Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet B
Mercredi 8 octobre 2025

Question 1 (3 pts)

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   et $\forall x \in I$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
   La fonction arccos est dérivable sur $J =]-1, 1[$
   et $\forall x \in J$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$
   La fonction arcsin est dérivable sur $K =]-1, 1[$
   et $\forall x \in K$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question 2 (1pt)

$$\arctan\left(\tan\frac{13\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arccos(\cos(3\pi)) = \pi$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

☐

Question 3 (2 pts)

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier ?
   On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire ?
   On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne. ☐

Question 4 (2 pts)

Vrai ou faux ? Justifier !

1. $\exists x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 7$
   VRAI ! $x = 2$ convient car $x^2 = 4 < 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 3x + 2 = 0$
   FAUX ! Par exemple, pour $x = 0$ on a $3x + 2 = 2 \neq 0$. ☐

Question 5 (2 pts)

1. Écrire avec des quantificateurs : il existe un entier naturel plus petit que tous les autres.
   $\exists x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y$

2. Écrire la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid x^2 - y > 2$.
   $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 - y \leq 2$ ☐

Question 6 (3 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 6u_n - 1$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{1}{5} - \frac{6^n}{5}$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{1}{5} - \frac{6^n}{5}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $\frac{1}{5} - \frac{6^0}{5} = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = \frac{1}{5} - \frac{6^n}{5}$. Montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{6^{n+1}}{5}$.

  On a $u_{n+1} = 6u_n - 1$, donc par HR, $u_{n+1} = 6\left(\frac{1}{5} - \frac{6^n}{5}\right) - 1 = \frac{6}{5} - 1 - \frac{6^{n+1}}{5} = \frac{1}{5} - \frac{6^{n+1}}{5}$. La formule est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{5} - \frac{6^n}{5}$. ☐