

Exercice II.3. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$.
2. On prend maintenant ABC un triangle quelconque du plan. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de bases $[AB], [AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice II.4. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| 1. $(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2;$ | 3. $\begin{cases} i-z = 1 \\ 2-z = 2 \end{cases}$ | 5. $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ |
| 2. $ 1+i+z = 2$ | | 4. $ z = 1-z = \left \frac{1}{z} \right $ |

Exercice II.5. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z-2}{z+i}$.

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice II.6. 1. Déterminer une racine réelle, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$

2. Démontrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice II.7. ** Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

1. $M(z), N(z^2)$ et $P(z^4)$ sont alignés.
2. $P(1), M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle.
3. $M(z), N\left(\frac{1}{z}\right)$ et $P(-i)$ sont alignés.

Exercice II.8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On considère l'équation $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. On note A et B les points images des solutions.
2. Déterminer θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice II.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. On note Ω le point image de ω dans le plan. On considère la transformation du plan qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ vérifiant

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

1. On prend $M \neq \Omega$. Justifier que $\Omega M = \Omega M'$ et que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$.
2. Quelle est cette transformation du plan?