

Chapitre 5 : Sommes et produits

I. Manipulations de sommes/produits

Voir fiche.

II. Sommes de référence

II.1. Égalité de Bernoulli

Proposition II.1. Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout complexe x , $1 - x^n = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})$.

Corollaire II.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tous entiers naturels $p \leq d$,

$$\sum_{k=p}^d u_k = u_p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1 - q}.$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemples II.1. Pour calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$, on passe par les complexes. Si $t \neq 0 \pmod{2\pi}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ikt} &= \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} && \text{(somme géométrique)} \\ &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{e^{i\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{(angle moitié)} \\ &= e^{i\frac{n}{2}t} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

II.2. Somme des termes d'une suite arithmétique

Proposition II.3. Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Plus généralement, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Pour tous entiers naturels $p \leq d$,

$$\sum_{k=p}^d u_k = (d - p + 1) \frac{u_p + u_d}{2}.$$

II.3. Somme des carrés

Proposition II.4. Pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

III. Formule du binôme de Newton

III.1. Coefficients binomiaux

Définition III.1. Étant donnés deux entiers n et k avec $0 \leq k \leq n$, on note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ qui se lit « k parmi n ».

Proposition III.1. 1. Pour tout $0 \leq n$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

2. Pour tous $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

3. Formule de Pascal : pour tous $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Remarque III.1. On peut calculer tous les coefficients binomiaux de proche en proche en les plaçant dans le triangle de Pascal en utilisant la formule de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...	k	$k+1$	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$			
$\vdots$										
n								$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$									$\binom{n+1}{k+1}$	

La première colonne et la diagonale ne contiennent que des 1, et chacun des autres éléments est obtenu en faisant la somme des éléments haut et haut-gauche.

III.2. Formule du binôme de Newton

Théorème III.2 (Formule du binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque III.2. Pour $n=2$, on retrouve l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Corollaire III.3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

III.3. Applications

On se sert de la formule du binôme de Newton notamment pour linéariser des fonctions trigonométriques, ou lorsqu'on utilise la formule de Moivre.

Proposition III.4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. **Formules d'Euler :** $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
2. **Formule de de Moivre :** $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Exemples III.1. • Linéarisons $\cos^4(x)$. On utilise la formule d'Euler, on développe et on regroupe les exponentielles par puissances opposées :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{16} + 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{16} + \frac{3}{8} \\ \cos^4(x) &= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

- Exprimons $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On utilise la formule de Moivre, on développe puis on prend la partie réelle/imaginaire :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - 3i \sin^3(x) \end{aligned}$$

Donc $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x)$ et $\sin(3x) = -3 \sin^3(x) + 3 \cos^2(x) \sin(x)$.

IV. Sommes doubles

Proposition IV.1. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et $I = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Soient $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . On a

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Proposition IV.2. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_p$ deux familles de nombres complexes. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_i b_j.$$

En particulier :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Proposition IV.3. Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ et $I = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \mid i \leq j\}$. Soient $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . On a

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^p a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^j a_{i,j}.$$