

Contrôle de cours 5 - Sommes / Complexes - Sujet A

Mercredi 15 octobre 2025

Question 1 (6 pts)

Soient $a, b, x, y, q \in \mathbb{C}$, $k, n, p, d \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d$. Rappelez les formules :

- $\sum_{k=p}^d q^k = q^p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$ et $= d - p + 1$ si $q = 1$.
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
- $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
- $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

□

Question 2 (1 pt)

Compléter :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij}$$

Question 3 (3 pts)

Simplifier au maximum les sommes :

1. $\sum_{k=0}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1 = 4 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = 2n(n+1) - (n+1) = (n+1)(2n-1)$
2. $\sum_{k=3}^{n+1} 5^{n-k} = \sum_{k=3}^{n+1} 5^n 5^{-k} = 5^n \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{5^k} = 5^n \frac{1}{5^3} \frac{1 - \frac{1}{5^{n-1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5^{n-2}}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$
3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^k 1^{n-k} = (6+1)^n = 7^n$

□

Question 4 (2pts)

Simplifier la somme :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} (\cos(k+1) - \cos(k-1)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k-1) \\
 &= \sum_{i=2}^n \cos(i) - \sum_{i=0}^{n-2} \cos(i) \\
 &= \cos(n) + \cos(n-1) + \cancel{\sum_{i=2}^{n-2} \cos(i)} - \left(\cos(0) + \cos(1) + \cancel{\sum_{i=3}^{n-2} \cos(i)} \right) \\
 &= \cos(n) + \cos(n-1) - \cos(1) - 1.
 \end{aligned}$$

□

Question 5 (2 pts)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n -ième de l'unité sont les solutions complexes z de l'équation : $z^n = 1$
2. L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Question 6 (2 pts)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient z_1, z_2 les solutions de $az^2 + bz + c = 0$.

Relations coefficients-racines :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

□

Question 7 (4 pts)

1. Déterminer les racines carrées de $-8 - 6i$.

$$\text{On cherche } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a + ib)^2 = -8 - 6i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2ab = -6 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{Les racines carrées de } -8 - 6i \text{ sont } -1 + 3i \text{ et } 1 - 3i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = (1 + i)^2 - 4(2 + 2i) = 2i - 8 - 8i = -8 - 6i$.

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-1 - i - 1 + 3i}{2} = -1 + i$ et $\frac{-1 - i + 1 - 3i}{2} = -2i$.

□

Contrôle de cours 5 - Sommes / Complexes - Sujet B

Mercredi 15 octobre 2025

Question 1 (6 pts)

Soient $a, b, x, y, q \in \mathbb{C}$, $k, n, p, d \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d$. Rappelez les formules :

$$\bullet \sum_{k=a}^b q^k = q^a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \text{ et } = b - a + 1 \text{ sinon.}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\bullet x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bullet \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

□

Question 2 (1 pt)

Compléter :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$$

Question 3 (3 pts)

Simplifier au maximum les sommes :

$$1. \sum_{k=4}^{n+1} 5^{n-k} = \sum_{k=4}^{n+1} 5^n 5^{-k} = 5^n \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{5^k} = 5^n \frac{1}{5^4} \frac{1 - \frac{1}{5^{n-2}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5^{n-3}}{4} \left(1 - \frac{1}{5^{n-2}} \right)$$

$$2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} = (3+1)^n = 4^n$$

$$3. \sum_{k=1}^n (5k+2) = 5 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 = 5 \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n(5n+9)}{2}$$

□

Question 4 (2pts)

Simplifier la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (\arctan(k-1) - \arctan(k+1)) &= \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(k+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \arctan(i) - \sum_{i=2}^n \arctan(i) \\
&= \arctan(0) + \arctan(1) + \sum_{i=2}^{n-2} \cancel{\arctan(i)} - \left(\arctan(n) + \arctan(n-1) + \sum_{i=2}^{n-2} \cancel{\arctan(i)} \right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \arctan(n) - \arctan(n-1)
\end{aligned}$$

□

Question 5 (2 pts)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n -ième de l'unité sont les solutions complexes z de l'équation : $z^n = 1$
2. L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

Question 6 (2 pts)Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient z_1, z_2 les solutions de $az^2 + bz + c = 0$.

Relations coefficients-racines :

- $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

□

Question 7 (4 pts)

1. Déterminer les racines carrées de $-8 - 6i$.

$$\begin{aligned}
\text{On cherche } a, b \in \mathbb{R} \text{ tels que } (a + ib)^2 = 8 - 6i &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = -6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 18 \\ 2ab = -6 \end{cases} \iff \\
\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases} &\quad \text{Les racines carrées de } -8 - 6i \text{ sont } -3 + i \text{ et } 3 - i.
\end{aligned}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1+i)z - 2 + 2i = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = (1+i)^2 - 4(-2+2i) = 2i + 8 - 8i = 8 - 6i$.Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-1-i-3+i}{2} = -2$ et $\frac{-1-i+3-i}{2} = 1-i$.

□