

Sommes et produits - Exercices

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Factoriser l'expression $a^{2m+1} + b^{2m+1}$ par $a + b$. Est-il possible de factoriser $a^{2m} + b^{2m}$ par $a + b$?

Exercice 2. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de la formule du binôme, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > -1$. On pose $a = x + 1$.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 \geq n(a - 1)$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 3. 1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer la partie entière de $\sum_{k=1}^{25} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

4. Donner la valeur de $\sum_{k=10000}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}}$ avec un erreur inférieure à $\frac{1}{50}$.

Exercice 4. Déterminer a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$, puis en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

En s'inspirant de la méthode précédente, calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5. Calculer les sommes et produits :

$$1. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \quad \left| \quad 2. \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad \left| \quad 3. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \left| \quad 4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right.$$

Exercice 6. 1. On souhaite calculer la somme $S_1 = \sum_{k=1}^n k$ d'une façon différente de celle vue en cours en utilisant notamment $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$.

$$\text{tamment } S_2 = \sum_{k=1}^n k^2.$$

(a) Exprimer $\sum_{k=1}^n (k+1)^2$ de deux façons différentes en fonction de S_1 , S_2 et n .

(b) En déduire la valeur de S_1 .

2. En s'inspirant du 1, calculer S_2 puis $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$a_n = \sum_{k=1}^n k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad c_n = \sum_{k=1}^n k^3.$$

Démontrer par récurrence que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $c_n = (a_n)^2$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \sum_{k=0}^n k(k+1) \\ 2. \sum_{k=0}^n (2k+1) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. \sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3) \\ 4. \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 5. \sum_{k=0}^n \text{ch}(kx), (x \in \mathbb{R}) \\ 6. \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3 + (-1)^k} \right)^k \end{array} \quad \left| \quad 7. \sum_{k=0}^n (-1)^k k\right.$$

Exercice 9. Soient n, p des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Montrer les relations :

$$\text{a) } \binom{n-1}{p-1} = \frac{p}{n} \binom{n}{p} \quad \text{b) } \binom{n+k}{k} \binom{n}{p} = \binom{n+k}{p+k} \binom{p+k}{k}$$

Exercice 10. Soit $n > 1$ un entier naturel. Exprimer le quotient $\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.

Exercice 11. Montrer par récurrence sur n que pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$, on a :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interpréter le résultat sur le triangle de Pascal.

Exercice 12. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$;

d) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

Indication : On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leq n$. Simplifier $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n .
2. En déduire la valeur de S_n .

Exercice 15. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r \leq m, n$.

1. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^{m+n}$?
2. Que vaut le coefficient devant x^r dans le développement de $(1+x)^n (1+x)^m$?
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$.

Exercice 16. 1. Linéariser les expressions suivantes : a) $\sin^3(x) \cos^3(x)$;

b) $\cos(x) \cos^2(2x)$

2. En déduire les valeurs des intégrales : a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) \cos^3(x) dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos^2(2x) dx$

Exercice 17. Exprimer :

1. $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

2. $\sin(5x)$ en fonction de $\sin x$.

Exercice 18. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$

3. $\sum_{k=0}^n \cos^3(k\theta)$

5. $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta)$

2. $\sum_{k=0}^n \cos(a+k\theta)$

4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

6. $\sum_{k=0}^n \sin(k\alpha) \sin(k\beta)$

Exercice 19. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (i+j)$

3. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(i, j)$

5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i j$

7. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i}$

2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$

4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

6. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j-1}$

Exercice 20. 1. Calculer : $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}$.

2. Calculer : $\sum_{k=1}^n k 2^k$ en faisant apparaître une somme double.

I. Indications - Solutions

Exercice 1 : Justifier d'abord que $a^{2m+1} + b^{2m+1} = a^{2m+1} - (-b)^{2m+1}$.
Que se passerait-il si on pouvait factoriser, puis remplacer b par $-a$?

Exercice 2 :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}x^k$. On minore la somme par 0 car $x \geq 0$.
- (a) On utilise Bernoulli : $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + 1)$. On distingue ensuite les cas $a > 1$, $a < 1$ et $a = 1$.
(b) On remplace $x = a - 1$ dans l'inégalité précédente.

Exercice 3 :

- $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ en utilisant la quantité conjuguée. Comme $\sqrt{k+1} < \sqrt{k}$, on obtient l'encadrement voulu.
- Avec l'inégalité de gauche on obtient : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{n} - 2$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$. Avec l'inégalité de droite on obtient : $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- $2\sqrt{26} - 2 < S < 2\sqrt{25} - 1 = 9$. De plus, $2\sqrt{26} - 2 > 2\sqrt{25} - 2 = 8$. Donc la partie entière vaut 8.
- On retrouve un encadrement : $2\sqrt{1000001} - 2\sqrt{10000} < \sum_{k=10000}^{1000000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{1000000} - 2\sqrt{9999}$, et avec la calculatrice, on obtient $1800,001 < S < 1800,02$.

Exercice 4 : On trouve $a = 1$, $b = -1$. La somme vaut $1 - \frac{1}{n+1}$.

On écrit $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2}$. La somme vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$.

Exercice 5 :

- $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
- $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$
- $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2n}$

Exercice 6 :

- (a) $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 = S_2 + (n+1)^2 - 1 = S_2 + 2S_1 + n$
(b) $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{k=1}^n (k+1)^3 = S_3 + (n+1)^3 - 1 = S_3 + 3S_2 + 3S_1 + n$, donc $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. De même, $S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 8 :

- $\sum_{k=0}^n k(k+1) = \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n (2k+1) = n(n+1) + n = n(n+2)$
- $\sum_{k=0}^n (2^k + 4k + n - 3) = 2^{n+1} + 2n(n+1) + n(n+1) - 3(n+1) = 2^{n+1} + 3(n+1)(n-1)$
- $\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}} = 8(3/4)^{n+1} - 8$
- $\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) = \frac{1}{2} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} \frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1} = \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{n+1}{2}x}}{e^{\frac{x}{2}}} \frac{\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{n+1}{2}x}}{e^{-\frac{x}{2}}} \frac{\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)} = \operatorname{ch}(nx/2) \frac{\operatorname{sh}((n+1)x/2)}{\operatorname{sh}(x/2)}$
si $x \neq 0$.

$$6. \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3+(-1)^k} \right)^k = \frac{16}{15} (1 - (1/16)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) + \frac{2}{3} (1 - (1/4)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}) \text{ en décomposant en pairs/impairs.}$$

$$7. \sum_{k=0}^n (-1)^k k = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ pair et } -\frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ impair, donc } (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Exercice 9 : Appliquer la définition des coefficients binomiaux.

Exercice 10 : On multiplie la fraction par le produit des pairs de 2 à $2n$ en haut et en bas : $\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = \frac{(2n)!}{(\prod_{k=1}^n 2k)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

Exercice 11 : Penser à la formule de Pascal pour l'hérédité.

Exercice 12 : On pose $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$ d'après la formule du binôme de Newton.

$$1. \text{ En dérivant } f, f'(1) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$2. f'(-1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n \geq 2, = 1 \text{ si } n = 1$$

$$3. \text{ En primitivant } f \text{ (attention à la constante!)}, \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

$$4. \text{ En dérivant 2 fois } f : f''(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}, \text{ donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = f''(1) + f'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Exercice 13 : On pourra vérifier que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$, puis utiliser la formule du binôme de Newton pour trouver $2^p \binom{n}{p}.$

Exercice 14 :

$$1. S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}.$$

$$2. 2S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}, \text{ donc } S_n = 2^{2n}.$$

Exercice 15 :

$$1. \binom{m+n}{r} \text{ (Newton).}$$

2. On applique Newton à chacun des deux facteurs, puis on redéveloppe. Pour obtenir une puissance r à la fin, on prend une puissance k dans le premier facteur et une puissance $r-k$ dans le deuxième. On trouve $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$

$$3. \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Exercice 16 :

$$1. \text{ a) } \sin^3 x \cos^3 x = \frac{3}{32} \sin(2x) - \frac{1}{32} \sin(6x)$$

$$\text{ b) } \cos x \cos^2(2x) = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos(5x).$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx = \frac{1}{12} \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2(2x) dx = \frac{7}{15}.$$

Exercice 17 :

$$1. \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1.$$

$$2. \sin(5x) = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x.$$

Exercice 18 :

$$\bullet \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \sin \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, = 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z};$$

- $\sum_{k=0}^n \cos(a + k\theta) = \cos\left(a + \frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $= (n+1) \cos a$ si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$;
- linéariser $\cos^3(x)$ pour trouver $\sum_{k=0}^n \cos^3(k\theta) = \frac{3}{4} \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{4} \cos \frac{3n\theta}{2} \frac{\sin\left(\frac{3(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\frac{3\theta}{2}}$ si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \cup \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$;
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \sin \frac{n\theta}{2} \cos^n \frac{\theta}{2}$;
- on dérive la précédente;
- utiliser $\sin(k\alpha) \sin(k\beta) = \frac{1}{2} \cos(k(\alpha - \beta)) - \frac{1}{2} \cos(k(\alpha + \beta))$.

Exercice 19 :

1. $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (i + j) = p \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{p(p+1)}{2} = \frac{np(n+p+2)}{2}$
2. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j) = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$ (on peut décomposer la somme précédente en somme sur la diagonale plus 2 fois la somme cherchée).
3. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$
4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$
6. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j-1} = n-1$
7. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{-j} \binom{j}{i} = n+1$

Exercice 20 :

1. $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^n 2^i \binom{n}{i} = 3^n$.
2. $\sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 2^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n 2^k = \sum_{i=1}^n 2^i (2^{n-i+1} - 1) = n 2^{n+1} - \sum_{i=1}^n 2^i = n 2^{n+1} - 2(2^n - 1) = (n-1) 2^{n+1} + 2$