

Chapitre 6 : Applications des nombres complexes

I. Équations algébriques

I.1. Équations du second degré à coefficients complexes

Proposition I.1. *Tout nombre complexe non nul z admet exactement deux racines carrées opposées.*

Méthode.

- Si $z = \rho e^{i\theta}$ est donné sous forme exponentielle, les deux racines carrées sont $\sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\sqrt{\rho} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}$.
- Si $z = c + id$, on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a + ib)^2 = c + id$. On prend les parties réelles et imaginaires ce qui nous donne le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = c \\ 2ab = d \end{cases}$ à résoudre. On peut aussi utiliser l'égalité des modules $a^2 + b^2 = |z|$ qui peut permettre de simplifier les calculs.

Remarque I.1. • Si $z = -\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors les deux racines carrées de z sont $\pm i\sqrt{\lambda}$.

• Il est **INTERDIT** d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ lorsque z est un nombre complexe.

Théorème I.2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Soit Δ le discriminant du polynôme $az^2 + bz + c$ et δ une racine carrée de Δ . Alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions (éventuellement confondues) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Remarque I.2. Si les coefficients sont réels et $\Delta < 0$, alors les deux solutions sont complexes conjuguées.

Proposition I.3 (Relations coefficients-racines). Soient z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

I.2. Racines de l'unité

Définition I.1. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Proposition I.4. • L'ensemble $\mathbb{U}$ correspond au cercle trigonométrique dans le plan complexe.

- L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et par division.
- Un nombre complexe z est dans $\mathbb{U}$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Remarque I.3. On dit que $\mathbb{U}$ muni de la multiplication est un groupe. De plus, la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{U}, \times)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si z est solution, alors $1 = |z^n| = |z|^n$, donc $|z| = 1$. Ainsi $z \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Or $1 = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, d'où $n\theta = 0[2\pi]$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$, soit encore $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

On peut se contenter de chercher $\theta \in [0, 2\pi[$. On obtient donc :

Théorème I.5

L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ qui sont appelées **racines n -ièmes de l'unité**.

Remarque I.4. • Géométriquement, ces n valeurs sont sur le cercle unité, aux sommets d'un n -gone régulier. On note souvent $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

- En posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les racines de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

Méthode. Pour résoudre l'équation $z^n = w$, où $w \in \mathbb{C}$ est fixé :

- Si $w = 0$, la seule solution est $z = 0$.
- Si $w \neq 0$, on écrit $w = \rho e^{i\theta}$. On a donc $w = \left(\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$. L'équation $z^n = w$ devient $z^n = \left(\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$ soit $\left(\frac{z}{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1$.
Les solutions sont donc $z = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Proposition I.6. Soit $n \geq 2$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = (-1)^{n-1}.$$

I.3. Équations de degré supérieur

Définition I.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction f est une **fonction polynomiale de degré n** si elle s'écrit :

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres complexes appelés **coefficients de f** et $a_n \neq 0$.

Proposition I.7. Soit f une fonction polynomiale et z_0 une solution de $f(z) = 0$. Alors il existe une fonction polynomiale g telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - z_0)g(z)$.

Pour résoudre des équations du type $f(z) = 0$, on pourra en général appliquer une des deux méthodes suivantes :

- procéder à un changement de variables afin d'obtenir une équation de plus petit degré que l'on sait résoudre.
- on cherche une racine évidente z_0 , puis on factorise par $(z - z_0)$ pour faire diminuer le degré.

II. Géométrie

Théorème II.1

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|.$$

Corollaire II.2. Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

- $(AB) \perp (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R};$
- $(AB) \parallel (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R};$
- A, B, C sont alignés $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R};$

Proposition II.3. • L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ vérifie : $z' = z + z_{\vec{u}}$.

- L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la rotation d'angle θ vérifie : $z' = e^{i\theta} z$.
- L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par l'homothétie de rapport k : $z' = kz$.
- L'image $M'(z')$ de $M(z)$ par la symétrie d'axe l'axe des réels vérifie : $z' = \bar{z}$.