

Correction du Devoir sur temps libre 3

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Comme $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, un tableau de signes nous donne $1-x^2 \geq 0 \iff [-1, 1]$. Donc g est définie sur $[-1, 1]$.

(b) La fonction g est dérivable sur $] -1, 1[$ (attention à la racine carrée). Pour tout $x \in] -1, 1[$, $g'(x) = 2\sqrt{1-x^2} +$

$$2x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a $g(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc le tableau de variations :

x	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
g	0			1	
			-1		0

(c) D'après le tableau de variations, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) \in [-1, 1]$. Or arcsin est définie sur $[-1, 1]$. Ainsi, f est définie sur $[-1, 1]$.

2. Soit $x \in [-1, 1]$: $f(-x) = \arcsin(-2x\sqrt{1-(-x)^2}) = -\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ car arcsin est impaire. Donc f est impaire.

3. D'après le tableau de variations de g , $g(x) = \pm 1 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et g est dérivable sur $] -1, 1[$. Donc f est dérivable sur $A = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$.

Pour tout $x \in A$, $f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} = 2 \frac{\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2+4x^4}} = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(1-2x^2)^2}}$ donc

$$f'(x) = 2 \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}|1-2x^2|}.$$

Si $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$, $1-2x^2 > 0$, donc $f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Si $x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$, $1-2x^2 < 0$, donc $f'(x) = -2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. D'après la question 1c, Δ est définie sur $[-1, 1]$. D'après la question 3, Δ est dérivable sur A .

5. D'après 3, pour tout $x \in I = \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$, $\Delta'(x) = 0$, donc Δ est constante sur I . De plus, $\frac{1}{2} \in I$, donc pour tout $x \in I$,

$$\Delta(x) = \Delta(1/2) = \arcsin\left(\frac{3}{2}\right) - 2\arcsin(1/2) = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{6} = 0.$$

D'où $\forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[$, $\Delta(x) = 0$.

6. Pour tout $x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$, $\Delta'(x) = -4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$, $\Delta(x) = -4\arcsin(x) + C$.

C. En évaluant en $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\Delta(\sqrt{3}/2) = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$ et $-4\arcsin(\sqrt{3}/2) + C = -\frac{4\pi}{3} + C$. Donc $C = \pi$.

Ainsi, $\forall x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$, $\Delta(x) = -4\arcsin(x) + \pi$.

7. Les solutions de l'équation de départ sont les solutions de $\Delta(x) = 0$. Or, pour tout $x \in \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right[$, $\Delta(x) = 0 \iff \arcsin(x) = \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.

On vérifie que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 0 sont solutions. Et d'après la question 5, tous les $x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ sont solutions.

Comme Δ est impair, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots + \binom{n}{n}x^n.$$

(b) D'où $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = g(1) = (1+1)^n = 2^n$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = g(-1) = (1-1)^n = 0$.

(c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en utilisant la première forme : $g'(x) = n \times (1+x)^{n-1}$.
En utilisant la forme développée :

$$g'(x) = 0 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \times 2x + \binom{n}{3} 3x^2 + \dots + \binom{n}{n} nx^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} kx^{k-1}.$$

(d) Donc
$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = g'(1) = n \times 2^{n-1}.$$

2. (a) $S'_1 + S'_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = S_1 = 2^n$. D'autre part, $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair, donc

$$\begin{aligned} S'_1 - S'_2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} (-1) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= S_2 = 0. \end{aligned}$$

(b) En ajoutant les deux égalités, on trouve $2S'_1 = 2^n$, donc $S'_1 = 2^{n-1}$, puis $S'_2 = 2^{n-1}$.

3. (a) Comme 1, j et j^2 sont les racines cubiques de l'unité, on a $1 + j + j^2 = 0$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$:

- si k est un multiple de 3, alors $j^k = 1$ et $j^{2k} = 1$. En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m$, donc $j^k = (j^3)^m = 1^m = 1$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} = 1$.
- si le reste de la division euclidienne de k par 3 vaut 1, alors $j^k = j$ et $j^{2k} = j^2$. En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m + 1$, donc $j^k = (j^3)^m \times j = j$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} \times j^2 = j^2$.
- si le reste de la division euclidienne de k par 3 vaut 2, alors $j^k = j^2$ et $j^{2k} = j$. En effet, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3m + 2$, donc $j^k = (j^3)^m \times j^2 = j^2$ et $j^{2k} = (j^3)^{2m} \times j^4 = j$.

(c) On remarque que
$$R_0 + R_1 + R_2 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = S_1 = 2^n.$$

(d) Développons :

$$\begin{aligned} (1+j)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k \\ &= \sum_{k=0,3|k}^n \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0,3|k-1}^n \binom{n}{k} j^k + \sum_{k=0,3|k-2}^n \binom{n}{k} j^k = \sum_{k=0,3|k}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0,3|k-1}^n \binom{n}{k} j + \sum_{k=0,3|k-2}^n \binom{n}{k} j^2 = R_0 + jR_1 + j^2R_2 \end{aligned}$$

d'après la question 3b. On recommence avec l'autre :

$$\begin{aligned}
 (1+j)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} 1^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} \\
 &= \sum_{k=0,3|k}^n \binom{n}{k} j^{2k} + \sum_{k=0,3|k-1}^n \binom{n}{k} j^{2k} + \sum_{k=0,3|k-2}^n \binom{n}{k} j^{2k} \\
 &= \sum_{k=0,3|k}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0,3|k-1}^n \binom{n}{k} j^2 + \sum_{k=0,3|k-2}^n \binom{n}{k} j \\
 &= R_0 + j^2 R_1 + j R_2
 \end{aligned}$$

encore en utilisant la question 3b.

(e) En factorisant par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
 (1+j)^n &= \left(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n \\
 &= e^{\frac{ni\pi}{3}} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n \\
 &= e^{\frac{ni\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

(f) On ajoute les trois équations précédentes :

$$\begin{aligned}
 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n &= R_0 + R_1 + R_2 + R_0 + j R_1 + j^2 R_2 + R_0 + j^2 R_1 + j R_2 \\
 &= 3R_0 + (1+j+j^2)R_1 + (1+j+j^2)R_2 \\
 &= 3R_0
 \end{aligned}$$

d'après la question 3a. D'autre part, en remarquant que $1+j^2 = \overline{1+j}$, on a

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2 \operatorname{Re}\left((1+j)^n\right).$$

D'après la question précédente, on a :

$$(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Ainsi,

$$R_0 = \frac{1}{3} (2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$$

4. On utilise $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ à la place de j .