

Calculs de primitives - Exercices

Exercice 1. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes, en précisant leurs ensembles de définition :

- | | | |
|--|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f_1(x) = 6x^2 + 8x + 3$ 2. $f_2(x) = 5a^2 x^6$ 3. $f_3(x) = x(x+a)(x+b)$ 4. $f_4(x) = \sqrt{2ax}$ 5. $f_5(x) = \frac{a}{a-x}$ 6. $f_6(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$ 7. $f_7(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 8. $f_8(x) = \frac{x}{2x^2+3}$ | <ol style="list-style-type: none"> 9. $f_9(x) = ae^{-bx}$ 10. $f_{10}(x) = xe^{-(x^2+1)}$ 11. $f_{11}(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ 12. $f_{12}(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ 13. $f_{13}(x) = \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$ 14. $f_{14}(x) = \frac{1}{2020} \frac{1}{x+ia}$ ($a \in \mathbb{R}^*$), E3A PC | <ol style="list-style-type: none"> 15. $f_{15}(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 16. $f_{16}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{\operatorname{ch}(x)}}$ 17. $f_{17}(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$ 18. $f_{18}(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ 19. $f_{19}(x) = \frac{\ln^2(x+2)}{x+2}$ |
|--|---|--|

Exercice 2. Déterminer les primitives de :

- | | | | |
|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1. $x \mapsto \cos(x) \sin(x)$ | 2. $x \mapsto \sin^2 x$ | 3. $x \mapsto \cos^3(x)$ | 4. $x \mapsto \tan(x)$ |
|--------------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------------|

Exercice 3. 1. Déterminer les primitives de $x \mapsto e^{3x} \cos(2x)$.
 2. Proposer une autre méthode pour trouver ces primitives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)e^{-t}$. On cherche une primitive F de f sous la forme $F(t) = (at+b)e^{-t}$.

1. Dériver F puis en déduire une primitive de $f(t) = (2t+1)e^{-t}$.
2. Calculer $\int_0^1 (2t+1)e^{-t} dt$.
3. Proposer une autre méthode pour déterminer une primitive de f .

Exercice 5. Déterminer une primitive de chacune des fonctions :

- | | | |
|--|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$ 2. $x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}$ 4. $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+5}$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$ 6. $x \mapsto \frac{1}{2x^2-4x+2}$ |
|--|---|---|

Exercice 6. Déterminer les expressions de :

- | | | |
|--|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $x \mapsto \int^x t \ln(t) dt$ 2. $x \mapsto \int^x t \arctan(t) dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $x \mapsto \int^x (t-1) \sin(t) dt$ 4. $x \mapsto \int^x (t+1) \operatorname{ch}(t) dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $x \mapsto \int^x \ln(t) dt$ |
|--|---|--|

Exercice 7. Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable :

- | | | |
|--|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t}^3}$ 2. $\int^x \frac{\ln(t)}{t+t \ln^2(t)} dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\int^x \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt$ 4. $\int^x \frac{dt}{e^t+1}$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\int^x \frac{dt}{\sin(t)}, u = \cos(t)$ 6. $I_4 = \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt, u = \sqrt{1+t}$ |
|--|---|--|

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $I_1 = \int_0^1 e^{tx} dx$ 2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$ 3. $I_3 = \int_{-1}^1 (it+t^2) dt$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $I_4 = \int_{-1}^1 x^2-x dx$ 5. $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+i)t} dt$ 6. $I_6 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt$ 8. $I_8 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$ 9. $I_9 = \int_0^1 t e^{t^2} dt$ |
|--|---|---|

$$\left. \begin{array}{l} 10. I_{10} = \int_0^1 5^x dx \\ 11. I_{11} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} \end{array} \right| \begin{array}{l} 12. I_{12} = \int_0^1 \frac{4x+2}{(x^2+x+3)^3} dx \\ 13. I_{13} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos x + i \sin x} \end{array} \left| \begin{array}{l} 14. I_{14} = \int_0^1 \frac{dx}{ix+1} \end{array} \right.$$

Exercice 9. 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tous $x \notin \{1, 2\}$, $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ puis déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x+2}$.

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

3. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. En utilisant une IPP, trouver une relation entre J_n et J_{n+1} .

2. Déterminer l'expression de J_n en fonction de n .

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

4. En déduire que (I_n) et (nI_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \int_1^2 (\ln x)^2 dx \\ 2. \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx \\ 3. \int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln^2(t)} \\ 4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \end{array} \right| \begin{array}{l} 5. \int_0^1 \arctan(x) dx \\ 6. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ 7. \int_0^\pi e^x \cos(x) dx \\ 8. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx \end{array} \left| \begin{array}{l} 9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^3 dt \\ 10. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx \\ 11. \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \\ 12. \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt \end{array} \right.$$

Exercice 13. Soient u , v et f trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est continue. On note F une primitive de f . Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

1. Exprimez G en fonction de F , de u et de v .

2. Montrez que si u et v sont dérivables alors G est dérivable et donnez sa dérivée.

3. Application : étudier la fonction $h : x \mapsto \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt$.

Exercice 14. 1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$.

2. En déduire que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\int_0^\pi t f(\sin(t)) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(t)) dt$.

2. En déduire la valeur de : $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$.