

Chapitre 8 : Équations différentielles linéaires

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cela dépend du contexte.

I. Vocabulaire

Définition I.1. On appelle **équation différentielle linéaire**

- **d'ordre 1** une équation différentielle du type :

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \quad (\text{E}_1)$$

où α , β et γ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ et définies sur un même intervalle I . Une solution est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable vérifiant $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I$.

- **d'ordre 2 à coefficients constants** une équation différentielle du type :

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (\text{E}_2)$$

où $a \in \mathbb{K}^*$, et $b, c \in \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue. Une solution est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable deux fois vérifiant $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$.

Définition I.2. On appelle **équation différentielle homogène** associée à

- l'équation (E_1) l'équation

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = 0 \quad (\text{H}_1)$$

- l'équation (E_2) l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{H}_2)$$

Proposition I.1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H_1) (resp. de (H_2)), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de (H_1) (resp. de (H_2)).

II. L'ordre 1

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, on commence par se ramener à une EDL normalisée du type

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (\text{EN}_1)$$

en divisant par $\alpha(t)$ (en faisant attention aux points où α s'annule).

L'équation homogène associée est

$$y' + a(t)y = 0. \quad (\text{HN}_1)$$

II.1. Résolution de l'équation homogène

Proposition II.1. Soit $A : I \rightarrow \mathbb{K}$ une primitive de a . L'ensemble des solutions de l'équation (HN_1) est :

$$S_0(I) = \{t \in I \mapsto C e^{-A(t)} \in \mathbb{K} \mid C \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque II.1. Lorsque $a(t)$ est constante, les solutions sont de la forme $t \mapsto C e^{-at}$.

II.2. Solution de l'équation avec second membre

Proposition II.2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\text{EN}_1) : y' + a(t)y = b(t)$. Alors $y_2 - y_1 \in S_0(I)$. Ainsi, si y_P est une solution particulière de (EN_1) , alors l'ensemble des solutions de (EN_1) est :

$$S(I) = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_0(I)\}.$$

II.3. Recherche de solutions particulières

On a le principe de superposition qui permet de couper le second membre en morceaux plus simples.

Proposition II.3. Si y_1 est solution de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 est solution de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $(E_{1+2}) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Démonstration. Comme $y_1' + ay_1 = b_1$ et $y_2' + ay_2 = b_2$, $(y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = b_1 + b_2$. □

Il y a ensuite deux méthodes pour trouver une solution particulière : la première consiste à trouver une solution évidente, mais ne fonctionne pas toujours !

Sinon, on cherche une solution particulière de la forme $y_P(t) = C(t) e^{-A(t)}$. On fait **varier la constante**.

On remplace y_P dans **(EN₁)** :

$$\begin{aligned} y_P' + a(t)y_P &= b(t) \\ \Leftrightarrow C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} &= b(t) \\ \Leftrightarrow C'(t)e^{-A(t)} &= b(t) \\ \Leftrightarrow C'(t) &= b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

Il « suffit » de trouver une primitive de $b(t)e^{A(t)}$.

II.4. Problème de Cauchy

Définition II.1. On appelle **problème de Cauchy** un système du type :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ sont fixés.

Théorème II.4 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution sur I .

III. L'ordre 2

III.1. Résolution de l'équation homogène

Définition III.1. L'équation $aX^2 + bX + c = 0$ est l'**équation caractéristique** de **(E₂)**.

Proposition III.1. Soit $r \in \mathbb{K}$. La fonction $f : x \mapsto e^{rx}$ est solution de **(H₂)** ssi r est solution de l'équation caractéristique associée.

Si de plus r est solution double de l'équation caractéristique, alors $x \mapsto xe^{rx}$ est aussi solution de **(H₂)**.

Proposition III.2 (EDL d'ordre 2 avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique de **(E₂)**. L'ensemble des solutions à valeurs complexes de **(H₂)** sont :

1. Si $\Delta = 0 : S_0 = \{t \mapsto (Ct + D)e^{r_0 t} \mid C, D \in \mathbb{C}\}$, où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique.
2. Si $\Delta \neq 0 : S_0 = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$, où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique.

Proposition III.3 (EDL d'ordre 2 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$). L'ensemble des solutions de (H_2) à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont :

1. Si $\Delta = 0$: $S_0 = \{t \mapsto (Ct + D)e^{r_0 t} \mid C, D \in \mathbb{R}\}$, où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique.
2. Si $\Delta > 0$: $S_0 = \{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$, où r_1 et r_2 sont les deux racines de l'équation caractéristique.
3. Si $\Delta < 0$: $S_0 = \{t \mapsto (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))e^{\alpha t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto A \cos(\omega t - \varphi) e^{\alpha t}, A, \varphi \in \mathbb{R}\}$, où $r = \alpha + i\omega$ et $\bar{r} = \alpha - i\omega$ ($\alpha, \omega \in \mathbb{R}$) sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Exemple III.1. Un exemple important qui apparaît souvent en physique : l'équation $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$, d'inconnue u .
L'équation caractéristique associée est $X^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont $\pm i\omega_0$. Ainsi, les solutions de l'équation sont :

- sur $\mathbb{C}$: $u(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$;
- sur $\mathbb{R}$: $u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

III.2. Solution de l'équation avec second membre

Proposition III.4. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_2) : $ay'' + by' + cy = f(t)$. Alors $y_2 - y_1 \in S_0(I)$.
Ainsi, si y_P est une solution particulière de (E_2) , alors l'ensemble des solutions de (E_2) est :

$$S(I) = \{y_P + y_H \mid y_H \in S_0(I)\}.$$

III.3. Recherche de solutions particulières

On a toujours le principe de superposition.

Proposition III.5 (Principe de superposition). Si y_1 est solution de $ay'' + by' + cy = f_1(t)$ et y_2 est solution de $ay'' + by' + cy = f_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = f_1(t) + f_2(t)$.

Méthode. • Lorsque $f(t)$ est une constante, on cherche une solution particulière de (E_2) sous la forme d'une constante.

- lorsque $f(t) = Ae^{\lambda t}$, où $(\lambda, A) \in \mathbb{C}^2$, on cherche y_P sous la forme :
 - ▷ $y_P(t) = Be^{\lambda t}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique;
 - ▷ $y_P(t) = Bte^{\lambda t}$ si λ est une solution simple de l'équation caractéristique;
 - ▷ $y_P(t) = Bt^2 e^{\lambda t}$ si λ est une solution double de l'équation caractéristique.
- lorsque $f(t) = A \cos(\omega t)$ (ou $f(t) = A \sin(\omega t)$), avec $(A, \omega) \in \mathbb{R}^2$,
 1. on cherche une solution particulière y_P en remplaçant f par $g(t) = Ae^{i\omega t}$;
 2. on met y_P sous forme algébrique : $y_P(t) = y_1(t) + i y_2(t)$;
 3. y_1 (resp. y_2) est la solution particulière cherchée.

III.4. Problème de Cauchy

Définition III.2. On appelle **problème de Cauchy** un système du type :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$, $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$ sont fixés.

Théorème III.6 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue, $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$ admet une et une seule solution sur I .