Équations différentielles - Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t = 0$ (ou $x = 0$).

a) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 3u = 2$

b) $y' + y = t^2 + \mathrm{e}^t$

c) $y' - 2y = 2$

d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \mathrm{e}^x$

e) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = \mathrm{e}^{2t}$

Exercice 2 (Décharge d'un condensateur). Un condensateur de capacité C est placé en série avec une résistance R. La tension initiale à ses bornes vaut E et on admet que cette tension vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0 \\ u(0) = E \end{cases}$$

On pose $\tau = RC$.

1. Résoudre ce problème de Cauchy et représenter la solution u en fonction du temps.
2. (a) Quel pourcentage de la tension initiale représente la tension u à l'instant τ ? 3τ ? 5τ ?
   (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de u en 0. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t = 0$ (ou $x = 0$).

a) $y' + 2ty = \mathrm{e}^{t^2}$

b) $(1 + x^2)y' + 2xy = 0$

c) $(1 + 4x^2)y' + y = 1$

d) $y' + 3t^2 y = t^2 + \mathrm{e}^{-t^3}$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé.

a) $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$

b) $(1 + x^2)y' = xy + \sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$

c) $xy' + y = \sin^3 x$, sur $\mathbb{R}_-^*$

d) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

e) $y' + (\tan x)y = \cos^3 x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

f) $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

g) $(1 - x^2)y' - 2xy = 1$, sur $]-1, 1[$

h) $x^3 y' + 4(1 - x^2)y = 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 (E3A 2019 PC). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $W'(x) + \dfrac{1}{2(x+i)} W(x) = 0$ avec $W(0) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 6.
1. Résoudre l'équation $(E) : xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
3. Reprendre les questions précédentes avec l'équation $(E) : xy' - 2y = x^3$.

Exercice 7.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle : $y'' + y = e^{(1+2i)t}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \mathrm{e}^t \cos 2t$.

Exercice 8.
1. Résoudre l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - 4\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3u = \cos 2t$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = e^t$.
3. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos 2t$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $y'' + y' - 6y = 1$

b) $y'' + 4y' = 4$

c) $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$

d) $y" + 3y' + 2y = \mathrm{ch}(x)$

e) $y" + 3y' + 2y = \mathrm{sh}(x)$

f) $y'' + 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^{-x}$

g) $y'' + 4y = \cos(t)$

h) $y'' + 4y = \cos(2t)$

i) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$

Exercice 10. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre $y'' - 2ay' + y = e^x$ en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a.

Exercice 12. **Prétexte :** Soient x_1 et x_2 les abscisses en fonction du temps de deux masses reliées à deux points fixes et entre elles par trois ressorts de même raideur. On admet que x_1 et x_2 vérifient :

$$\begin{cases} x_1''(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

1. En posant $y(t) = \dfrac{x_1(t) - x_2(t)}{2}$ et $z(t) = \dfrac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$, résoudre le système proposé.
2. En déduire les fonctions x_1 et x_2 avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \\ x_2'(0) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 13. Soient a et b deux réels et c une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t) \tag{E}$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(\mathrm{e}^x).$$

1. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de f et de ses dérivées.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $f(t)$ en fonction de g.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire différentielle d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
4. Application :
   (a) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation
   $$t^2 y'' - ty' + 5y = t^2.$$

Exercice 14. On considère l'équation différentielle $(E) : y^{(3)} - y = 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f'' + f' + f$.
   Montrer que f est solution de (E) ssi g est solution d'une EDL à déterminer.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 15. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 16. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 18. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x).$$