Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet A
Mercredi 12 novembre 2025

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.

1. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. □

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} (3x-2)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

   On dérive $3x-2$ et on intègre e^{2x} : $u = 3x-2$, $v' = \mathrm{e}^{2x}$, $u' = 3$ et $v = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{2}{3}} uv' &= [uv]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} u'v \\ &= \left[(3x-2)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \left[\frac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.

   Lorsque $x = 0$, $t = 1$ et lorsque $x = 1$, $t = \mathrm{e}$. De plus, $x = \ln(t)$, donc $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}}{t}$. Donc $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^{\mathrm{e}} = \arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}$. □

Question 3 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\cos(3t)\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{3it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(2+3i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2+3i}[\mathrm{e}^{(2+3i)t}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2+3i}(\mathrm{e}^{2\pi+3i\pi} - 1) \\ &= \frac{2-3i}{13}(-\mathrm{e}^{2\pi} - 1) \\ &= \frac{-2(\mathrm{e}^{2\pi}+1) + 3i(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{13}. \end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{-2(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{13}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 1+8 = 9$. Le polynôme a donc deux racines : 1 et -2. Donc $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$. On décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{1/3}{x-1} + \dfrac{-1/3}{x+2}$.
   Donc :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\left[\ln(|x-1|)\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{3}\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{2}{3}\ln(2). \end{aligned}$$

$\square$

Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet B
Mercredi 12 novembre 2025

Question 1 (2 pts)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.

1. La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. □

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \displaystyle\int_{-1}^0 (2x-1)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

   On dérive $2x-1$ et on intègre e^{3x} : $u(x) = 2x-1$, $v'(x) = \mathrm{e}^{3x}$, $u'(x) = 2$ et $v(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$:

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^0 uv' &= [uv]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'v \\ &= \left[(2x-1)\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3} + \mathrm{e}^{-3} - \left[\frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^0 \\ &= \frac{11}{9}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t) + t}$ en effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$.

   Lorsque $t = 1$, $x = 0$ et lorsque $t = \mathrm{e}$, $x = 1$. De plus, $t = \mathrm{e}^x$, donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Donc $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{2\,\mathrm{e}^x\,x + \mathrm{e}^x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \frac{1}{2}[\ln(2x+1)]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}$. □

Question 3 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\sin(3t)\,\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{3it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(2+3i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2+3i}[\mathrm{e}^{(2+3i)t}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2+3i}(\mathrm{e}^{2\pi+3i\pi} - 1) \\ &= \frac{2-3i}{13}(-\mathrm{e}^{2\pi} - 1) \\ &== \frac{-2(\mathrm{e}^{2\pi}+1) + 3i(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{13}. \end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{3it}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{3(\mathrm{e}^{2\pi}+1)}{13}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x$.
On calcule le discriminant : $\Delta = 16-12 = 4$. Le polynôme a donc deux racines : -1 et -3. Donc $\dfrac{1}{x^2+4x+3} = \dfrac{1}{(x+1)(x+3)}$. On décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{1/2}{x+1} + \dfrac{-1/2}{x+3}$.
Donc :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x+3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(|x+1|)\right]_{-5}^{-4} - \frac{1}{2}\left[\ln|x+3|\right]_{-5}^{-4} \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{1}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

□