Résoudre un système avec le pivot de Gauss

Lorsqu'on veut résoudre un système du type :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array}\right.$$

où chaque $\bullet$ représente un coefficient du système et les inconnues sont rangées chacune dans une colonne, on procède par étapes :

- **Étape 0 :** si le coefficient $(1,1)$ est déjà non nul, cette étape est inutile. On cherche un coefficient $\bigstar$ non nul (de préférence un 1) dans la première colonne et on le place en position $(1,1)$ en échangeant deux lignes. C'est le **pivot** de la première colonne.
  Par exemple, on échange ici les deux première lignes :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \dots & & & & & & \end{array}\right.$$

- **Étape 1 :** grâce à des opérations $L_i \leftarrow \bullet \times L_1 - \bigstar \times L_i$, on élimine l'inconnue de toutes les lignes L_i situées sous le pivot ($i \geq 2$).
  Si une ligne $0 = 0$ apparaît, on la supprime.
  Si une ligne $0 = \bullet$ apparaît (avec $\bullet \neq 0$), on s'arrête : le système est incompatible !
  On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \dots & & & & & \end{array}\right.$$

- **Reprise des étapes 0 et 1 :** on reprend les étapes 0 et 1 en « oubliant » la première ligne.
  Si une colonne n'a pas de pivot, on passe à celle d'après.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \dots & & & & & \end{array}\right. \text{ devient } \left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \dots & & & & \end{array}\right. \text{ puis } \left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bigstar & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & & \dots & & & \end{array}\right.$$

  Lorsqu'on arrive à la dernière ligne, le système est **échelonné**.

- **Étape 2 :** on part de la colonne j qui contient le dernier pivot. On élimine grâce à des opérations $L_i \leftarrow \bullet \times L_j - \bigstar \times L_i$, on élimine l'inconnue de toutes les lignes L_i situées au-dessus du pivot ($i \geq j$).
  On divise ensuite la ligne L_j par le pivot pour faire apparaître un 1

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bigstar & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bigstar & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \bigstar & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bigstar & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & 1 & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

- **Reprise de l'étape 2 :** on reprend l'étape 2 en « oubliant » la dernière ligne. On obtient à la fin un système **échelonné réduit** :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & 1 & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & 1 & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

On exprime alors les inconnues correspondants aux pivots (les **inconnues principales**) en fonction des autres (les **paramètres**) s'il y en a.