

Calculs de primitives - Exercices

Exercice 1. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes, en précisant leurs ensembles de définition :

$$1. f_1(x) = 6x^2 + 8x + 3$$

$$2. f_2(x) = 5a^2 x^6$$

$$3. f_3(x) = x(x+a)(x+b)$$

$$4. f_4(x) = \sqrt{2ax}$$

$$5. f_5(x) = \frac{a}{a-x}$$

$$6. f_6(x) = \frac{2x+3}{2x+1}$$

$$7. f_7(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$8. f_8(x) = \frac{x}{2x^2+3}$$

$$9. f_9(x) = a e^{-bx}$$

$$10. f_{10}(x) = x e^{-(x^2+1)}$$

$$11. f_{11}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$12. f_{12}(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$13. f_{13}(x) = \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$14. f_{14}(x) = \frac{1}{2020} \frac{1}{x+ia} \quad (a \in \mathbb{R}^*), \text{ E3A PC}$$

$$15. f_{15}(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. f_{16}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\sqrt{\text{ch}(x)}}$$

$$17. f_{17}(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

$$18. f_{18}(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$$

$$19. f_{19}(x) = \frac{\ln^2(x+2)}{x+2}$$

Exercice 2. Déterminer les primitives de :

$$1. x \mapsto \cos(x) \sin(x)$$

$$2. x \mapsto \sin^2 x$$

$$3. x \mapsto \cos^3(x)$$

$$4. x \mapsto \tan(x)$$

Exercice 3. 1. Déterminer les primitives de $x \mapsto e^{3x} \cos(2x)$.

2. Proposer une autre méthode pour trouver ces primitives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (2t+1)e^{-t}$. On cherche une primitive F de f sous la forme $F(t) = (at+b)e^{-t}$.

1. Dériver F puis en déduire une primitive de $f(t) = (2t+1)e^{-t}$.

2. Calculer $\int_0^1 (2t+1)e^{-t} dt$.

3. Proposer une autre méthode pour déterminer une primitive de f .

Exercice 5. Déterminer une primitive de chacune des fonctions :

$$1. x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$$

$$2. x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$$

$$3. x \mapsto \frac{x+x^2}{1+x^2}$$

$$4. x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+5}$$

$$5. x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$6. x \mapsto \frac{1}{2x^2-4x+2}$$

Exercice 6. Déterminer les expressions de :

$$1. x \mapsto \int^x t \ln(t) dt$$

$$2. x \mapsto \int^x t \arctan(t) dt$$

$$3. x \mapsto \int^x (t-1) \sin(t) dt$$

$$4. x \mapsto \int^x (t+1) \text{ch}(t) dt$$

$$5. x \mapsto \int^x \ln(t) dt$$

Exercice 7. Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable :

$$1. \int^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t}^3}$$

$$2. \int^x \frac{\ln(t)}{t+t \ln^2(t)} dt$$

$$3. \int^x \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt$$

$$4. \int^x \frac{dt}{e^t+1}$$

$$5. \int^x \frac{dt}{\sin(t)}, u = \cos(t)$$

$$6. I_4 = \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt, u = \sqrt{1+t}.$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$1. I_1 = \int_0^1 e^{tx} dx$$

$$2. I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$$

$$3. I_3 = \int_{-1}^1 (it+t^2) dt$$

$$4. I_4 = \int_{-1}^1 |x^2-x| dx$$

$$5. I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+i)t} dt$$

$$6. I_6 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$7. I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt$$

$$8. I_8 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$9. I_9 = \int_0^1 t e^{t^2} dt$$

$$\left. \begin{array}{l} 10. I_{10} = \int_0^1 5^x dx \\ 11. I_{11} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} \end{array} \right| \begin{array}{l} 12. I_{12} = \int_0^1 \frac{4x+2}{(x^2+x+3)^3} dx \\ 13. I_{13} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos x + i \sin x} \end{array} \left| \begin{array}{l} 14. I_{14} = \int_0^1 \frac{dx}{ix+1} \end{array} \right.$$

Exercice 9. 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tous $x \notin \{1, 2\}$, $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ puis déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x+2}$.

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

3. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx}{x^2+1} + \frac{c}{x^2+1}$ puis calculer $x \mapsto \int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. En utilisant une IPP, trouver une relation entre J_n et J_{n+1} .

2. Déterminer l'expression de J_n en fonction de n .

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} pour tout $n \geq 1$.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.

4. En déduire que (I_n) et (nI_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 12. Calculer les intégrales suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \int_1^2 (\ln x)^2 dx \\ 2. \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx \\ 3. \int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln^2(t)} \\ 4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \end{array} \right| \begin{array}{l} 5. \int_0^1 \arctan(x) dx \\ 6. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ 7. \int_0^\pi e^x \cos(x) dx \\ 8. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx \end{array} \left| \begin{array}{l} 9. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^2 (\cos t)^3 dt \\ 10. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx \\ 11. \int_0^1 \ln(1+t^2) dt \\ 12. \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt \end{array} \right.$$

Exercice 13. Soient u , v et f trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est continue. On note F une primitive de f . Soit G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

1. Exprimez G en fonction de F , de u et de v .

2. Montrez que si u et v sont dérivables alors G est dérivable et donnez sa dérivée.

3. Application : étudier la fonction $h : x \mapsto \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt$.

Exercice 14. 1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - t$.

2. En déduire que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 15. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que : $\int_0^\pi t f(\sin(t)) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(t)) dt$.

2. En déduire la valeur de : $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1+\cos^2(t)} dt$.

I. Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $F_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

2. $F_2(x) = \frac{5a^2}{7}x^7 + C$

3. $F_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2} + C$

4. $F_4(x) = \sqrt{2ax}x + C$

5. $F_5(x) = -a \ln|a-x| + C$

6. $F_6(x) = x + \ln|2x+1| + C$

7. $F_7(x) = \sqrt{x^2+1} + C$

8. $F_8(x) = \frac{1}{4} \ln(2x^2+3) + C$

9. $F_9(x) = -\frac{a}{b}e^{-bx} + C$

10. $F_{10}(x) = -\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C$

11. $F_{11}(x) = \ln|e^x - 1| + C$

12. $F_{12}(x) = -e^{\frac{1}{x}} + C$

13. $F_{13}(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

14. $F_{14}(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) - i \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

15. $F_{15}(x) = \frac{\arcsin^2(x)}{2} + C$

16. $F_{16}(x) = 2\sqrt{\operatorname{ch}(x)} + C$

17. $F_{17}(x) = -\ln|1 + \cos(x)| + C$

18. $F_{18}(x) = -\arctan(\cos(x)) + C$

19. $F_{19}(x) = \frac{1}{3} \ln^3(x+2) + C$

Exercice 2 :

1. $\int^x \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \sin^2(t) + C$

2. $\int^x \sin^2(t) dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

3. $\int^x \cos^3(t) dt = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} = \frac{3\sin(x)}{4} + \frac{\sin(3x)}{12} + C$

4. $\int^x \tan(t) dt = \ln|\cos(x)| + C.$

Exercice 3 :

1. $\int^x e^{3t} \cos(2t) dt = e^{3x} \frac{3\cos(2x) + 2\sin(2x)}{13}.$

2. On applique deux IPP successives.

Exercice 4 :

1. $F'(t) = (-at - b + a)e^{-t}$, donc $a = -2$ et $-b + a = 1$ et $b = -3$.

2. $\int_0^1 (2t+1)e^{-t} dt = F(1) - F(0) = -5e^{-1} - 3.$

3. On fait une IPP.

Exercice 5 :

1. $\int^x \frac{1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

2. $\int^x \frac{1-t}{1+t^2} dt = \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

3. $\int^x \frac{t+t^2}{1+t^2} dt = x - \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

4. $\int^x \frac{1}{t^2+2t+5} dt = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$

5. $\int^x \frac{1}{t^2-5t+6} dt = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$

6. $\int^x \frac{1}{2t^2-4t+2} dt = -\frac{1}{2(x-1)}.$

Exercice 6 :

1. $\int^x t \ln(t) dt = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2 \ln(x)}{2}$

2. $\int^x t \arctan(t) dt = \frac{x^2 \arctan(x)}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2}$

3. $\int^x (t-1) \sin(t) dt = -(x-1) \cos(x) + \sin(x)$

4. $\int^x (t+1) \operatorname{ch}(t) dt = (x+1) \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)$

$$5. \int^x \ln(t) dt = x \ln(x) - x$$

Exercice 7 :

$$1. \int^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t}^3} = 2 \arctan(\sqrt{x}) \text{ avec } u = \sqrt{t}$$

$$2. \int^x \frac{\ln(t)}{t + t \ln^2(t)} dt = \frac{1}{2} \ln(1 + \ln^2(x)) \text{ avec } u = \ln(t)$$

$$3. \int^x \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = e^x - \ln(1 + e^x) \text{ avec } u = e^x$$

$$4. \int^x \frac{dt}{e^t + 1} = x - \ln(e^x + 1) \text{ avec } u = e^t$$

$$5. \int^x \frac{dt}{\sin(t)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x) + 1} \right|$$

$$6. I_4 = \int^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt = \frac{2}{3} \sqrt{1+x}^3 - 2\sqrt{1+x}.$$

Exercice 8 :

$$1. I_1 = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}.$$

$$2. \text{ On linéarise } \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}. I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{4}$$

$$3. I_3 = \int_{-1}^1 (it + t^2) dt = \frac{2}{3}.$$

$$4. \text{ On coupe l'intégrale suivant le signe de } x^2 - x. I_4 = \int_{-1}^1 |x^2 - x| dx = 1.$$

$$5. I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(2+i)t} dt = \frac{e^{\pi}(1+2i) - 2 + i}{5}.$$

$$6. \text{ On reconnaît } \frac{u'}{u} \text{ avec } u = \ln(x). I_6 = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \ln 2.$$

$$7. I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$8. \text{ On reconnaît } u' u, \text{ avec } u = \ln x. I_8 = \frac{3}{2}.$$

$$9. \text{ On reconnaît } \frac{1}{2} u' e^u \text{ avec } u = t^2. I_9 = \frac{e-1}{2}.$$

$$10. I_{10} = \frac{4}{\ln 5}.$$

$$11. \text{ On factorise : } x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3), \text{ puis on écrit } \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}. I_{11} = \ln(16/15).$$

$$12. \text{ On reconnaît } \frac{2u'}{u^3}. I_{12} = \frac{16}{225}.$$

$$13. I_{13} = -2i.$$

$$14. \text{ On écrit } \frac{1}{ix+1} = \frac{1}{1+x^2} - i \frac{x}{1+x^2} \text{ puis on calcule l'intégrale de la partie réelle et celle de la partie imaginaire. } I_{14} = \frac{\pi}{4} - i \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 9 :

$$1. \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{-3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \text{ puis une primitive est } x \mapsto \ln \left| \frac{(x-2)^4}{(x-1)^3} \right|.$$

$$2. a = \frac{1}{2}, b = -1 \text{ et } c = \frac{1}{2}. \int^x \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} = \frac{\ln(|x|) + \ln(|x+2|)}{2} - \ln(|x+1|) + C.$$

$$3. a = -1, b = 1 \text{ et } c = 1. \int^x \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx = \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} \ln(|x^2+1|) + \arctan x + C.$$

Exercice 10 :

$$1. \text{ On dérive } (1-t^2)^n \text{ et on intègre 1. On trouve } (2n+3)J_{n+1} = (2n+2)J_n.$$

$$2. \text{ On montre par récurrence que } J_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

$$3. J_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 11 :

- On dérive $(\ln x)^n$ et on primitivise x . On trouve $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$.
- $I_n - I_{n-1} = \int_1^e x(\ln x)^{n-1} (\ln(x)-1) dx$ pour $n \geq 1$. Or $\ln(x)-1 \leq 0$ et $x(\ln x)^{n-1} \geq 0$ sur l'intervalle $[1, e]$. Donc $I_n - I_{n-1} \leq 0$.
- $I_n \leq I_{n-1}$, donc $-\frac{n}{2} I_n \geq -\frac{n}{2} I_{n-1}$ et $I_n \leq \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_n$, ce qui donne $I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$. De même, $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, donc $I_n \geq \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$, ce qui donne $I_n \geq \frac{e^2}{n+3}$.
- Théorème d'encadrement : $\lim I_n = 0$ et $\lim n I_n = e^2$.

Exercice 12 :

- On fait 2 IPP en primitivant 1 et en dérivant $(\ln x)^2$ puis $\ln x$. On trouve $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2$.
- On reconnaît $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = e^x + 1$. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$.
- On fait le changement de variable $u = \ln t$. On trouve $\int_1^2 \frac{dt}{t + t \ln^2(t)} = \arctan(\ln(2))$.
- On fait deux IPP en dérivant x^2 puis x . On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx = \pi - 2$.
- On fait une IPP en dérivant $\arctan$ et on primitivise 1. On trouve $\int_0^1 \arctan(x) dx = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$.
- On fait le changement de variable $x = \sin t$ puis on linéarise. On trouve $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{16}$.
- On applique la méthode du cours, ou bien on fait deux IPP. On trouve $\int_0^\pi e^x \cos(x) dx = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.
- On fait une IPP en dérivant $\arcsin(x)$ et en primitivant 1, ou bien on fait $u = -x$. On trouve $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin(x) dx = 0$.
- Soit on linéarise, soit on pose $u = \sin t$. On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^3(t) dt = \frac{2}{15}$.
- $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} dx$. On pose $u = \sin(x)$ et on trouve $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{1-u^2}$ puis on décompose en éléments simples. On trouve $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln(1+\sqrt{2})$.
- On fait une IPP en dérivant $\ln(1+t^2)$ et en primitivant 1. On trouve $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.
- On fait deux IPP en dérivant $\sin(\ln(t))$ puis $\cos(\ln(t))$ et en primitivant 1. On trouve $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Exercice 13 :

- $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$.
- Par le TFA, F est de classe $\mathcal{C}^1$. Par composition, G est dérivable et $G' = v' \times f \circ v - u' \times f \circ u$.
- Les fonctions $t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$, $t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ sont continues sur $[0, 1]$. Les fonctions $x \mapsto \cos^2(x)$ et $x \mapsto \sin^2(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$. Donc h est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $h'(x) = -2\sin(x)\cos(x)\arccos|\cos(x)| + 2\sin(x)\cos(x)\arcsin|\sin(x)|$. La fonction est π -périodique. Sur $[0, \pi/2]$, on trouve $h'(x) = 0$, sur $[\pi/2, \pi]$, $h'(x) = 0$.
Donc h est constante et vaut $h(x) = h(0) = \int_0^1 \arccos(\sqrt{t}) dt = \frac{\pi}{4}$ en faisant le changement de variable $t = \cos^2(u)$ puis une IPP.

Exercice 14 :

- C'est immédiat.
- On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$. On a $I = J$ et $I + J = \frac{\pi}{2}$.

3. On fait le changement de variable $u = \sin(t)$. On trouve donc $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 15 :

1. On fait le changement de variable $u = \pi - t$.
2. On trouve $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{2 - \sin^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \frac{\pi^2}{4}$ en posant $u = \cos(t)$.