

Résolution de systèmes Linéaires - Exercices

- Exercice 1.**
- Donner une écriture paramétrique du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x - y + 3z = -2$
 - Donner une écriture paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations :
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - 4z = 6 \end{cases}$$

Exercice 2. Dans chaque cas, résoudre le système linéaire. Interpréter en termes d'intersections de plans.

$1. \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$	$4. \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases}$
$2. \begin{cases} 2y - z = 1 \\ -2x - 4y + 3z = -1 \\ x + y - 3z = -6 \end{cases}$	$5. \begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 0 \\ a + b = 1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$
$3. \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$	

Exercice 3. Dans chaque cas, résoudre le système en discutant suivant les valeurs des paramètres scalaires. Interpréter en termes d'intersections de plans ou de droites.

$1. \begin{cases} x - 3y + 7z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 7x + 4y - z = c \end{cases}$	$4. \begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$
$2. \begin{cases} (1 - m)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3 + m)y + 3z = 0 \\ x + y - (2 + m)z = 0 \end{cases}$	$5. \begin{cases} x + y - z = x' \\ 2x + y + z = y' \\ -x - 2y + 3z = z' \end{cases}$
$3. \begin{cases} (m + 1)x + my = 2m \\ mx + (m + 1)y = 1 \end{cases}$	$6. \begin{cases} y + z = rx \\ x + z = ry \\ x + y = rz \end{cases}$

Exercice 4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct on considère les plans d'équations :

$$\mathcal{P} : ax + y + z + 1 = 0, \quad \mathcal{P}' : x + ay + z + a = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'' : x + y + az + b = 0$$

Déterminer les réels a et b pour que l'intersection de ces trois plans soit une droite.
En donner alors une représentation paramétrique.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $\mathcal{P} = \{(-2, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(-3, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $\mathcal{D} = \{(7/3, 11/3, 0) + z(1/3, 11/3, 1), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 :

- | | | |
|--|--|-------------------------|
| 1. $S = \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$. | | 3. $S = \{1, 2, -2\}$. |
| 2. $S = \{(1, 2, 3)\}$. | | 4. $S = \{1, 3, 1\}$. |
| | | 5. $S = \emptyset$. |

Exercice 3 :

1. Si $-2a - 5b + c \neq 0$, il n'y a pas de solution. Sinon, les solutions sont $S = \left\{ \left(\frac{2a+3b}{5} - z, \frac{b-a}{5} + 2z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$.
2. Si $m = -1$, $S = \{(-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$; si $m = 0$, $S = \{(3z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$; si $m = -3$, $S = \left\{ \left(\frac{3}{2}z, -\frac{5}{2}z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$; sinon, $S = \{0, 0, 0\}$.
3. Si $m = -\frac{1}{2}$, $S = \{(-2 + y, y), y \in \mathbb{R}\}$; sinon, $S = \{(m, 1 - m)\}$.
4. Si $m = -1$, $S = \emptyset$; si $m = 1$, $S = \{(1 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$; sinon $S = \left\{ \left(\frac{m^2}{1+m}, \frac{m^2}{1+m} \right) \right\}$.
5. $S = \{(5x' - y' + 2z', -7x' + 2y' - z', -3x' + y' - z')\}$.
6. Si $r = -1$, $S = \{(-y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$; si $r = 2$, $S = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\}$; sinon, $S = \{(0, 0, 0)\}$.

Exercice 4 : Le système $\begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + ay + z = -a \\ x + y + az = -b \end{cases}$ doit être compatible et doit avoir deux équations. Après échelonnement, si $a = 1$, on obtient un plan ou l'ensemble vide; si $a = -2$, il reste deux équations, mais il faut $b = 1$ pour la compatibilité; sinon, il n'y a qu'une seule solution. Donc $a = -2$ et $b = 1$. Une représentation paramétrique est alors $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.