

Équations différentielles - Exercices

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t = 0$ (ou $x = 0$).

a) $\frac{du}{dt} - 3u = 2$	c) $y' - 2y = 2$	e) $\frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$
b) $y' + y = t^2 + e^t$	d) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^x$	

Exercice 2 (Décharge d'un condensateur). Un condensateur de capacité C est placé en série avec une résistance R . La tension initiale à ses bornes vaut E et on admet que cette tension vérifie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} RC \frac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = E \end{cases}$$

On pose $\tau = RC$.

1. Résoudre ce problème de Cauchy et représenter la solution u en fonction du temps.
2. (a) Quel pourcentage de la tension initiale représente la tension u à l'instant τ ? 3τ ? 5τ ?
 (b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de u en 0. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ et préciser la solution qui vaut 1 pour $t = 0$ (ou $x = 0$).

a) $y' + 2ty = e^{t^2}$	b) $(1+x^2)y' + 2xy = 0$	c) $(1+4x^2)y' + y = 1$	d) $y' + 3t^2y = t^2 + e^{-t^3}$
-------------------------	--------------------------	-------------------------	----------------------------------

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle précisé.

a) $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ b) $(1+x^2)y' = xy + \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ c) $xy' + y = \sin^3 x$, sur $\mathbb{R}_+^*$ d) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	e) $y' + (\tan x)y = \cos^3 x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ f) $y' + (\tan x)y = \sin x + \cos^3 x$, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ g) $(1-x^2)y' - 2xy = 1$, sur $] -1, 1[$ h) $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$, sur $\mathbb{R}_+^*$
---	---

Exercice 5 (E3A 2019 PC). Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $W'(x) + \frac{1}{2(x+i)}W(x) = 0$ avec $W(0) = \sqrt{\pi}$.

- Exercice 6.**
1. Résoudre l'équation $(E) : xy' + y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
 2. L'équation (E) admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
 3. Reprendre les questions précédentes avec l'équation $(E) : xy' - 2y = x^3$.

- Exercice 7.**
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation différentielle : $y'' + y = e^{(1+2i)t}$.
 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = e^t \cos 2t$.

- Exercice 8.**
1. Résoudre l'équation différentielle : $\frac{d^2u}{dt^2} - 4\frac{du}{dt} + 3u = \cos 2t$.
 2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = e^t$.
 3. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = 2e^t - 3\cos 2t$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $y'' + y' - 6y = 1$	d) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{ch}(x)$	g) $y'' + 4y = \cos(t)$
b) $y'' + 4y' = 4$	e) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sh}(x)$	h) $y'' + 4y = \cos(2t)$
c) $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$	f) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	i) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$

Exercice 10. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 5 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre $y'' - 2ay' + y = e^x$ en discutant suivant les valeurs du paramètre réel a .

Exercice 12. Prétexte : Soient x_1 et x_2 les abscisses en fonction du temps de deux masses reliées à deux points fixes et entre elles par trois ressorts de même raideur. On admet que x_1 et x_2 vérifient :

$$\begin{cases} x_1''(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) &= x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}$$

1. En posant $y(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2}$ et $z(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$, résoudre le système proposé.
2. En déduire les fonctions x_1 et x_2 avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0 \\ x_2(0) &= 1 \\ x_2'(0) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 13. Soient a et b deux réels et c une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = c(t) \quad (\text{E})$$

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(e^x).$$

1. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de f et de ses dérivées.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $f(t)$ en fonction de g .
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle linéaire différentielle d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
4. Application :
 - (a) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$.
 - (b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$t^2 y'' - ty' + 5y = t^2.$$

Exercice 14. On considère l'équation différentielle (E) : $y^{(3)} - y = 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f'' + f' + f$.
Montrer que f est solution de (E) ssi g est solution d'une EDL à déterminer.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 15. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 16. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t) dt \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 18. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\pi - x).$$

I. Indications - Solutions

Exercice 1 :

- a) Solution générale de l'équation homogène : $u_H(t) = C e^{3t}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière : $u_P(t) = -\frac{2}{3}$ (solution évidente). Solution générale de l'équation : $u(t) = C e^{3t} - \frac{2}{3}$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $C = \frac{5}{3}$.
- b) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière : $y_P(t) = t^2 - 2t + 2 + \frac{e^t}{2}$ (superposition + solution évidente). Solution générale de l'équation : $y(t) = C e^{-t} + t^2 - 2t + 2 + \frac{e^t}{2}$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $C = -\frac{3}{2}$.
- c) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C e^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière : $y_P(t) = -1$ (solution évidente). Solution générale de l'équation : $y(t) = C e^{2t} - 1$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $C = 2$.
- d) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(x) = C e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière : $y_P(x) = -e^x$ (solution évidente). Solution générale de l'équation : $y(x) = C e^{2x} - e^x$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $C = 2$.
- e) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C e^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière : $y_P(t) = t e^{2t}$ (solution évidente). Solution générale de l'équation : $y(t) = C e^{2t} + t e^{2t}$, $C \in \mathbb{R}$. Condition initiale : $C = 1$.

Exercice 2 :

1. Solution générale de l'équation : $u(t) = C e^{-t/\tau}$. $u(0) = E \iff C = E$. Donc $u(t) = E e^{-t/\tau}$.
2. (a) $\frac{u(\tau)}{u(0)} = e^{-1} \cong 36,79\%$, $\frac{u(3\tau)}{u(0)} = e^{-3} \cong 4,98\%$ et $\frac{u(5\tau)}{u(0)} = e^{-5} \cong 0,67\%$.
- (b) $y = u'(0)t + u(0) = -Et/\tau + E$, qui coupe l'axe des abscisses pour $t = \tau$.

Exercice 3 :

- a) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C e^{-t^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière $y_P(t) = e^{-t^2} \int_{x=0}^t e^{2x^2} dx$ (variation de la constante). Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $y(t) = e^{-t^2} \int_{x=0}^t e^{2x^2} dx + C e^{-t^2}$, $C \in \mathbb{R}$. Puis $y(0) = 1 \iff C = 1$.
- b) $(1+x^2)y' + 2xy = 0 \iff y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$ car $1+x^2$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Solution générale de l'équation : $y(x) = C \frac{1}{x^2+1}$, $C \in \mathbb{R}$. Puis $y(0) = 1 \iff C = 1$.
- c) $(1+4x^2)y' + y = 1 \iff y' + \frac{1}{1+(2x)^2}y = \frac{1}{1+(2x)^2}$. Solution générale de l'équation homogène : $y_H(x) = C e^{-\frac{\arctan(2x)}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière $y_P(x) = 1$. Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $y(x) = 1 + C e^{-\frac{\arctan(2x)}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$. Puis $y(0) = 1 \iff C = 0$.
- d) Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C e^{-t^3}$, $C \in \mathbb{R}$. Solution particulière $y_P(t) = \frac{1}{3} + t e^{-t^3}$ (variation de la constante). Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $y(t) = \frac{1}{3} + t e^{-t^3} + C e^{-t^3}$, $C \in \mathbb{R}$. Puis $y(0) = 1 \iff C = \frac{2}{3}$.

Exercice 4 :

- | | |
|---|---|
| <p>a) $S = \left\{ x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>b) $S = \left\{ x \mapsto \arctan(x) \sqrt{x^2+1} + C \sqrt{x^2+1}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>c) $S = \left\{ x \mapsto -\frac{\cos(x)}{x} + \frac{\cos^3(x)}{3x} + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>d) $S = \left\{ x \mapsto -\frac{\cos(2x)}{2\cos(x)} + \frac{C}{\cos(x)}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> | <p>e) $S = \left\{ x \mapsto \frac{x \cos(x)}{2} + \frac{\cos(x) \sin(2x)}{4} + C \cos(x), C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>f) $S = \left\{ x \mapsto -\ln(\cos(x)) \cos(x) + \frac{x \cos(x)}{2} + \frac{\cos(x) \sin(2x)}{4} + C \cos(x), C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>g) $S = \left\{ x \mapsto -\frac{x}{x^2-1} + \frac{C}{x^2-1}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> <p>h) $S = \left\{ x \mapsto C \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, C \in \mathbb{R} \right\}$.</p> |
|---|---|

Exercice 5 : On commence par chercher une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{1}{x+i} = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{i}{2} \frac{1}{x^2+1}$, qui est $x \mapsto \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{i}{2} \arctan(x)$. Solution de l'équation (homogène) : $W_H(x) = C \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}} e^{\frac{i}{2} \arctan(x)}$. Avec la condition initiale, $C = \sqrt{\pi}$.

Exercice 6 :

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$: $y_-(x) = 1 + C_+ \frac{1}{x}$, $C_+ \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}_-^*$: $y_+(x) = 1 + C_- \frac{1}{x}$, $C_- \in \mathbb{R}$.
2. Soit y une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont données à la question précédente. En regardant les limites en 0^+ et 0^- , on a forcément $C_+ = C_- = 0$. Donc $y = 1$.
3. Sur $\mathbb{R}_\pm^*$: $y_\pm(x) = C_\pm x^2 + x^3$, $C_\pm \in \mathbb{R}$. On prend y une solution sur $\mathbb{R}$. En calculant la limite de y en 0, on ne trouve pas de condition sur $C_\pm$. En regardant la dérivée en 0, on ne trouve pas de condition non plus! On trouve donc $y = \begin{cases} C_+ x^2 + x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ C_- x^2 + x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Exercice 7 :

1. Solution générale de l'équation homogène : $y_H(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Solution particulière $y_P(t) = \frac{-1-2i}{10} e^{(1+2i)t}$.
Ainsi les solutions de l'équation initiale sont $y(t) = \frac{-1-2i}{10} e^{(1+2i)t} + C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.
2. On remarque que $e^t \cos(2t) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)t})$, donc les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation sont $y(t) = \operatorname{Re}\left(\frac{-1-2i}{10} e^{(1+2i)t}\right) + C_1 \cos t + C_2 \sin t = -\frac{1}{10} e^t \cos(2t) + \frac{2}{10} e^t \sin(2t) + C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 :

1. $S = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{65} (\cos(2t) + 8 \sin(2t)) + C_1 e^{3t} + C_2 e^t, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$
2. $S = \left\{ t \mapsto -\frac{1}{2} t e^t + C_1 e^{3t} + C_2 e^t, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$
3. $S = \left\{ x \mapsto -x e^x + \frac{3}{65} (\cos(2x) + 8 \sin(2x)) + C_1 e^{3x} + C_2 e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 9 :

- | | |
|---|--|
| a) $S = \left\{ x \mapsto C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ | f) $S = \left\{ x \mapsto (C_1 x + C_2) e^{-x} - x^2 e^{-x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ |
| b) $S = \left\{ x \mapsto C_1 + C_2 e^{-4x} + x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ | g) $S = \left\{ t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{3} \cos(t), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ |
| c) $S = \left\{ t \mapsto C_1 e^{2t} + C_2 e^{-4t} + \frac{1}{7} e^{3t}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ | h) $S = \left\{ t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \cos(2t) + \frac{t}{4} \sin(2t), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ |
| d) $S = \left\{ x \mapsto C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{x}{2} e^{-x} + \frac{1}{12} e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ | i) $S = \left\{ x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{6}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos(2x), C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ |
| e) $S = \left\{ x \mapsto C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{x}{2} e^{-x} + \frac{1}{12} e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$ | |

Exercice 10 : $S = \{t \mapsto (C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)) e^{-t} + \frac{1}{2}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$, conditions initiales : $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{6}$.

Exercice 11 : Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = 4(a^2 - 1)$.

- Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et les deux racines sont $r_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $r_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Notons que $r_1 = 1 \iff a = 1$ et $r_2 = 1 \iff a = 1$. Une solution particulière est donnée par $y_P(x) = \frac{e^x}{2-2a}$.
- Si $a = -1$: les solutions de l'équation homogène sont $y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par $y_P(x) = \frac{e^x}{4}$.
- Si $a = 1$: les solutions de l'équation homogène sont $y_H(x) = (C_1 + C_2 x) e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par $y_P(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$.
- Si $a \in]-1, 1[$: les deux racines sont $r_1 = a + i\sqrt{1-a^2}$ et $r_2 = a - i\sqrt{1-a^2}$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_H(x) = (C_1 \cos(\sqrt{1-a^2}t) + C_2 \sin(\sqrt{1-a^2}t)) e^{at}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Une solution particulière est donnée par $y_P(x) = \frac{e^x}{2-2a}$.

Exercice 12 :

1. On vérifie aisément que $y''(t) = -3y(t)$ et $z''(t) = -z(t)$. Donc $y(t) = C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)$, $z(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Puis on trouve $x_1(t) = y(t) + z(t)$ et $x_2(t) = z(t) - y(t)$.
2. $x_1(t) = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos t$, $x_2(t) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \cos t$.

Exercice 13 :

1. La fonction g est la composée de f qui est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de $x \mapsto e^x$ qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t = e^{\ln(t)}$, donc $f(t) = g(\ln(t))$.
3. • Si f est solution de (E), alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$t^2 f''(t) + at f'(t) + bf(t) = c(t).$$

On pose $x = \ln(t)$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2x} f''(e^x) + a e^x f'(e^x) + b f(e^x) = c(e^x)$$

donc

$$g''(x) - g'(x) + a g'(x) + b g(x) = c(e^x).$$

Ainsi, g est solution de l'EDL : $y'' + (a-1)y' + by = c(e^x)$.

- Réciproquement, si g est solution de l'EDL ci-dessus, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) + (a-1)g'(x) + bg(x) = c(e^x)$$

donc

$$e^{2x} f''(e^x) + ae^x f'(e^x) + bf(e^x) = c(e^x)$$

On pose $t = e^x$, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$t^2 f''(t) + at f'(t) + bf(t) = c(t).$$

Donc f est solution de (E).

Ainsi, f est solution de (E) ssi g est solution de l'EDL : $y'' + (a-1)y' + by = c(e^x)$.

4. (a) L'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 5 = 0$, dont les racines sont $1 \pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h(x) = (A \cos(2x) + B \sin(2x)) e^x$, pour $A, B \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière y_p sous la forme $y_p(x) = C e^{2x}$. On trouve $C = \frac{1}{5}$.

Ainsi, les solutions de l'équation $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$ sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{5} e^{2x} + (A \cos(2x) + B \sin(2x)) e^x \text{ pour } A, B \in \mathbb{R}.$$

- (b) On a $a = 1$, donc $a - 1 = -2$ et $b = 5$. D'après la question 3, une fonction f est solution de $t^2 y'' - t y' + 5y = t^2$ si et seulement si $g = f \circ \exp$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = e^{2x}$.

Ainsi, les solutions de l'équation $t^2 y'' - t y' + 5y = t^2$ sont les fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{5} t^2 + (A \cos(2 \ln(t)) + B \sin(2 \ln(t))) t, \text{ pour } A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 :

1. On commence par remarquer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g' = f^{(3)} + f'' + f' = f^{(3)} - f + g$.

Si f est solution de (E), alors $g' = g$.

Réciproquement, si g vérifie $g' = g$, alors $f^{(3)} - f = 0$.

2. Les solutions de $g' = g$ sont les fonctions $x \mapsto C e^x$, pour $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, f est solution de (E) ssi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f'' + f' + f = C e^x$. L'équation caractéristique a pour solutions $-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto e^{-x/2} (A \cos(\sqrt{3}/2) + B \sin(\sqrt{3}/2))$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $x \mapsto K e^x$, et on trouve $K = C/3$.

Au final, l'ensemble des solutions de (E) est : $\left\{ x \mapsto \frac{C}{3} e^x + e^{-x/2} (A \cos(\sqrt{3}/2) + B \sin(\sqrt{3}/2)), \text{ avec } A, B, C \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 15 : Analyse : Soit f une fonction dérivable vérifiant l'équation. On pose $b = f(0) + f(1)$, puis on résout $y' + y = b$. Les solutions sont $y(x) = b + C e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Ainsi f s'écrit $f(x) = b + C e^{-x}$. Synthèse : Réciproquement, on est ramené à l'équation $f(0) + f(1) = b \iff b = -\frac{C(e+1)}{e}$. Donc $S = \left\{ x \mapsto C \left(-\frac{e+1}{e} + e^{-x} \right), C \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 16 : Analyse : Comme dans l'exercice précédent, on pose $b = \int_0^1 f(t) dt$, puis on résout $y' = y + b$. On trouve $y(x) = -b + C e^x$, $C \in \mathbb{R}$. Synthèse : Réciproquement, on est ramené à l'équation $\int_0^1 f(t) dt = b \iff b = \frac{C(e-1)}{2}$. Donc $S = \left\{ C \left(\frac{e-1}{2} + e^x \right), C \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 17 : Analyse : Soit f une solution du problème. On commence par démontrer que $f(0) = 0$ ou 1. Dans le premier cas, f est la fonction nulle. Dans le deuxième cas, on fixe $x \in \mathbb{R}$ et on démontre que f est dérivable en x et que $f'(x) = f'(0)f(x)$. Ainsi, f est une fonction du type e^{at} , pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Synthèse : On vérifie réciproquement que toutes ces fonctions conviennent.

Exercice 18 : Analyse : soit f une solution du problème. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \pi - x$ aussi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Ainsi, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f''(x) = -f'(\pi - x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f vérifie l'ED $y'' + y = 0$. Les solutions sont $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On remplace dans l'équation de départ et on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) = -C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$. En prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $C_1 = -C_2$. Synthèse : Prenons une fonction de la forme $f(x) = C(\cos(x) - \sin(x))$ avec $C \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = C(-\cos(x) - \sin(x)) = f(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.