Chapitre 10 : Ensembles, logique et rédaction

I. Assertions et démonstrations

Voir fiche.

II. Rudiments de théorie des ensembles

II.1. Parties d'un ensemble

Définition II.1. Si E et F sont deux ensembles, on dit que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E si tout élément de F est un élément de E. On note $F \subset E$:

$$F \subset E \iff (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E).$$

L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Méthode. Pour montrer que $F \subset E$,

- on fixe un élément de F,
- on montre qu'il est dans E.

Proposition II.1. *Soient E, F et G trois ensembles.*

1. *$E \subset E$ et $\emptyset \subset E$. (Réflexivité)*
2. *Si $F \subset E$ et $E \subset F$ alors $E = F$. (Antisymétrie)*
3. *Si $G \subset F$ et $F \subset E$ alors $G \subset E$. (Transitivité)*

Méthode. Pour montrer que $E = F$, on peut donc procéder par **double-inclusion** : on montre que $E \subset F$ puis que $F \subset E$.

Remarques II.1.

- Ainsi, $\subset$ est une relation d'ordre. Attention, elle n'est pas totale.
- $\mathscr{P}(E)$ contient toujours E et $\emptyset$.
- On écrit $F \not\subset E$ lorsque $\exists x \in F, x \notin E$.

Exemple II.1. Une équation sur $x \in \mathbb{R}$ (ou sur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ou sur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, etc...) définit une partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^2$, ou de $\mathbb{R}^3$, etc...).
Par exemple, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Une équation du type $ax + by + c = 0$ définit une droite du plan, et une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan de l'espace.
Par exemple,

- $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0\right\}$ est la droite passant par $(0, 1)$ et $(1, 0)$.
- $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z - 1 = 0\right\}$ est le plan passant par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

II.2. Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition II.2. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit :

- L'**union** de A et B : $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- L'**intersection** de A et B : $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- La **différence** de A et B : $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- Le **complémentaire** de A dans E : $\overline{A} = A^c = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

On dit que A et B sont **disjointes** si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition II.2. *Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$:*

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

- $B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset A \cap C$ *et* $A \cup B \subset A \cup C$
- $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Proposition II.3. *1. L'intersection et l'union sont **commutatives** :*

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad A \cap B = B \cap A \text{ et } A \cup B = B \cup A.$$

*2. L'intersection et l'union sont **associatives** :*

$$\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ et } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

*3. L'ensemble vide est un **élément neutre** pour l'union :*

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A \cup \emptyset = A.$$

*4. L'ensemble E est un **élément neutre** pour l'intersection :*

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad A \cap E = A.$$

*5. L'intersection et l'union sont **distributives** l'une sur l'autre :*

$$\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

*6. **Lois de Morgan** :*

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ et } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

7. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$ *et* $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

8. $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $A \cup E = E$, $A \setminus E = \emptyset$ *et* $E \setminus A = A^c$.

Définition II.3. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On définit :

- La réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$: $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x_i \in A_i\}$.
- L'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$: $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x_i \in A_i\}$.

Remarque II.2. Les lois de Morgan fonctionnent encore avec des familles de parties.

Définition II.4. On appelle **recouvrement disjoint** de E un ensemble $\{A_i \mid i \in I\}$ de parties de E qui sont :

- deux à deux disjointes : $\forall i, j \in I, A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Si de plus tous les A_i sont non vides, alors on dit que $\{A_i \mid i \in I\}$ est une **partition** de E.

II.3. Produit cartésien

Définition II.5. Soient E et F deux ensembles. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles.

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x_i \in E_i\}.$$

Remarque II.3. Lorsque $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, on note $E^n = E \times E \times \ldots E$. Par exemple $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.