Parties de $\mathbb{R}$ - Exercices

Exercice 1.

1. Montrer que si a et b sont deux nombres rationnels avec $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est-il stable par somme ? par produit ?

Exercice 3. Déterminer si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :

1. $A_1 = \{1 + n, n \in \mathbb{N}\}$
2. $A_2 = \left\{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $A_3 = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
4. $A_4 = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $A_5 = \left\{\dfrac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
6. $A_6 = \left\{2\sin(x) + \cos(y) + 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
7. $A_7 = \left\{\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}, (m, n) \in \left(\mathbb{Z}^*\right)^2\right\}$
8. $A_8 = \left\{5\sin(x) - e^y + 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 4.

1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(B) \leq \inf(A)$.
3. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$.
   (a) Montrer que A est majorée et B et minorée et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
   (b) Donner un exemple avec $\sup(A) = \inf(B)$.
5. * Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$.

Exercice 5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble B par : $B = \{tx + (1-t)y \mid (x, y) \in A^2, t \in [0, 1]\}$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose dans cette question que $A = \{a, b\}$. Que vaut B ?
2. Montrer que B est borné et $\sup(B) = \sup(A)$ et $\inf(B) = \inf(A)$.
3. Montrer que B est un intervalle.

Exercice 6. Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.