Chapitre 11 : Parties de $\mathbb{R}$

I. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

I.1. Les entiers

Définition I.1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{0,1,2,\dots\} \cup \{-1,-2,\dots,\}$.

Remarques I.1.

- $\mathbb{N}$ est muni d'une opération (loi de composition interne), l'addition $+$. Cette loi est associative, c'est-à-dire que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$, $(a+b)+c = a+(b+c)$: l'ordre dans lequel on effectue les additions n'importe pas. On dispose aussi d'un élément neutre : $\forall a \in \mathbb{N}$, $a+0 = a$.

- $\mathbb{Z}$ est lui aussi muni de l'addition qui a les mêmes propriétés. De plus, chaque éléments a de $\mathbb{Z}$ a un opposé b qui vérifie : $a+b=0$. On dit que $(\mathbb{Z},+)$ est un **groupe**. Il est de plus **commutatif** car $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $a+b = b+a$.
  Il y a une autre opération sur $\mathbb{Z}$, la multiplication $\times$. Cette loi est aussi associative, elle a un élément neutre 1, et elle se distribue sur l'addition. On dit que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un **anneau**.

I.2. Nombres rationnels

Lorsque l'on souhaite découper un entier en parts égales ou encore résoudre $3x = 3$ ou bien $3x = 1$, on a besoin des nombres rationnels.

Définition I.2. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Remarque I.2. $\mathbb{Q}$ est lui aussi muni de l'addition et de la multiplication. $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe et $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un anneau. De plus, tout élément non nul r de $\mathbb{Q}$ admet un inverse s pour $\times$: $r \times s = 1$. On dit que $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un **corps commutatif**.

Certaines données réelles ne peuvent pas s'exprimer avec des nombres rationnels. Par exemple, la longeur de la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$.

Proposition I.1. *$\sqrt{2}$ est irrationnel.*

II. $\mathbb{R}$

La construction de $\mathbb{R}$ est hors-programme. On peut essayer de se représenter cet ensemble principalement de deux façons :

- On « bouche les trous laissés par les rationnels » pour obtenir la droite réelle.
- On écrit tout réel x sous la forme $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in [\![0,9]\!]$ pour $k \geq 1$. On impose de plus que les a_k ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. On dit que c'est le **développement décimal propre de** x.

Remarque II.1. Les rationnels sont les nombres réels qui ont des développements décimaux très particuliers : soit ils n'ont qu'un nombre fini de décimales, soit leurs décimales se répètent.
Par exemple, $0,123456789123456789\dots$ est un rationnel.

II.1. Parties majorées, minorées, bornées

Définition II.1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est un **majorant** de A si : $\forall x \in A, x \leq M$. On dit alors que A est **majorée**.
- On dit que m est un **minorant** de A si : $\forall x \in A, m \leq x$. On dit alors que A est **minorée**.
- Si A est majorée et minorée, on dit que A est **bornée**.

Définition II.2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit que $M \in \mathbb{R}$ est le **maximum** de A si M est un majorant de A et $M \in A$. On note alors $M = \max(A)$.
- On dit que $m \in \mathbb{R}$ est le **minimum** de A si m est un minorant de A et $m \in A$. On note alors $m = \min(A)$.

Remarque II.2. On sous-entend dans cette définition que s'il existe, le maximum (resp. le minimum) est unique.

Proposition II.1.

- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum.*

II.2. Propriété de la borne supérieure

Définition II.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- S'il existe, le plus petit majorant M de A est appelé **borne supérieure** de A.
  C'est-à-dire : $\forall M' \in \mathbb{R}, M'$ majore $A \Rightarrow M \leq M'$. On note $M = \sup A$.
- S'il existe, le plus grand minorant m de A est appelé **borne inférieure** de A.
  C'est-à-dire : $\forall m' \in \mathbb{R}, m'$ minore $A \Rightarrow m' \leq m$. On note $m = \inf A$.

Le théorème suivant découle de la construction de $\mathbb{R}$.

Théorème II.2 (Propriété de la borne supérieure)

- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
- *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Remarque II.3. Lorsque $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ n'est pas majorée, on note $\sup A = +\infty$ et lorsqu'elle n'est pas minorée, on note $\inf A = -\infty$.

Proposition II.3. *Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ qui possède un maximum M (resp. un minimum m), alors $\sup A = M$ (resp. $\inf A = m$). La réciproque n'est pas vraie.*

Proposition II.4.

- $M = \sup A \iff M$ *majore A et* $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$.
- $m = \inf A \iff m$ *minore A et* $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon$.

II.3. Intervalles

Proposition II.5. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties « sans trou » (qu'on appelle convexes).

Proposition II.6. *Soit $]a, b[$ un intervalle non vide. Alors $]a, b[$ contient au moins un rationnel et un irrationnel.*

On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans $\mathbb{R}$.

II.4. Nombres décimaux

Définition II.4. On appelle **nombre décimal** un nombre réel qui s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{10^k}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Proposition II.7 (Approximations décimales d'un nombre réel). *Soit $n \geq 1$ un entier. Tout réel x peut-être encadré de manière unique sous la forme :*

$$\underbrace{D_n(x) = N + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par défaut}} \leq x < \underbrace{N + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n + 1}{10^n}}_{\text{Valeur approchée par excès}}$$

où $N \in \mathbb{Z}$ et $d_1, d_2, \ldots d_n \in [\![0, 9]\!]$. De plus, $D_n(x) = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.