Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ - Exercices

Exercice 1.

1. Calculer PGCD$(888, 264)$ et PGCD$(729, 54)$.
2. Déterminer les décompositions en facteurs premiers de 660 et 192. En déduire le pgcd et le ppcm de ces deux entiers.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$. Déterminer PGCD(a, b) en fonction de n.
4. Déterminer le nombre de diviseurs positifs de $10!$.
5. Déterminer tous les entiers naturels x, y avec $x \leq y$ et PGCD$(x, y) = 18$ et PPCM$(x, y) = 252$.

Exercice 2 (Petit théorème de Fermat). Soit p un nombre premier.

1. Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que p divise $n^p - n$ pour tout entier relatif n.
3. En déduire que si p ne divise pas n, alors p divise $n^{p-1} - 1$.

Exercice 3.

1. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer le reste de la division euclidienne de $n^2 + 3n + 1$ par $n - 1$.
2. Déterminer les entier naturels n tels que $n + 1 | n^2 + 1$.
3. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que a est **congru à** b **modulo** n si $n | (b-a)$. On note alors $a \equiv b\,[n]$.

1. Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \equiv b\,[n] \iff b \equiv a\,[n]$.
2. Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, $(a \equiv b\,[n]$ et $b \equiv c\,[n]) \Rightarrow a \equiv c\,[n]$.
3. Montrer que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, $(a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]) \Rightarrow a + c \equiv b + d\,[n]$.
4. Montrer que : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$, $(a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]) \Rightarrow ac \equiv bd\,[n]$.
5. Montrer que : $\forall (a, b, k) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$, $a \equiv b\,[n] \Rightarrow a^k \equiv b^k\,[n]$.
6. Soit $m \in \mathbb{N}$. On note s la somme de ses chiffres. Montrer que $m \equiv s\,[3]$. Comment peut-on tester si un entier est divisible par 3 ?
7. Montrer qu'un nombre est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme des ses chiffres de rangs pairs et ceux de rangs impairs est divisible par 11.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z_n = (1+2i)^n$ et on note $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $b_{n+1} = 2b_n - 5b_{n-1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, b_n est un entier qui n'est pas divisible par 5.
3. Justifier alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \notin \mathbb{R}$.