Ensembles, logique et rédaction - Exercices

I. Logique

Exercice I.1. On considère A : « m et n sont deux entiers pairs » et B : « $m+n$ est un entier pair ».
A-t-on $\forall m, n \in \mathbb{N}, A \Rightarrow B$? $\forall m, n \in \mathbb{N}, B \Rightarrow A$? $\forall m, n \in \mathbb{N}, A \iff B$? Justifier.

Exercice I.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes puis leur négation.

1. La fonction f n'est pas la fonction nulle.
2. La fonction f ne s'annule jamais.
3. La fonction f est majorée par 5.
4. La fonction f est bornée.
5. Tout réel admet un antécédent par f.
6. 0 est le seul antécédent de 0 par f.
7. La fonction f est ni croissante ni décroissante sur I.

Exercice I.3.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - 3n + 2$ est pair.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $n^3 - n$.

Exercice I.4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. Montrer que : $a < b \iff (\exists c \in \mathbb{R} \mid a < c < b)$.

Exercice I.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer par l'absurde que l'on a : $|z+1| \geq 1$ ou $|z-1| \geq 1$.

Exercice I.6.
1. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction qui s'annule en 0.

Exercice I.7.
1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + y$.

Exercice I.8.
- Bonjour mon capitaine, je voudrais connaître l'âge de vos trois enfants.
- Hardi moussaillon, le produit de leurs âges est 36 !
- Mais il me faudrait une information supplémentaire !
- Sacrebleu, la somme de leurs âges est égale au nombre de marins de mon équipage !
- Bon, je vais aller les compter
  ...
- Mon capitaine, il me faudrait en savoir plus pour conclure.
- Corne de saperlipopette ! Le plus jeune de mes enfants ne sait pas nager !

Quel est l'âge des enfants du capitaine ?

II. Ensembles

Exercice II.1.
1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $[1, 2[$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 2 \text{ et } y \leq 3\}$. Déterminer son complémentaire.
3. On pose $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$ et $B = \{(3t-1, -2t+1), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice II.2.
1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} =]-\infty, 0]$.
2. Soit $a < b$ deux réels. Montrer que $[a, b] = \{ta + (1-t)b, \text{ avec } t \in [0, 1]\}$.

Exercice II.3. On définit les ensembles :

$$E = \{0, 1\}, \quad F = \{x \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = x\} \quad \text{et} \quad G = \{x \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x^n = x\}.$$

1. Écrire en toutes lettres les définitions des ensembles F et G.

2. Montrer que $E \subset F$.
3. Montrer que l'un des ensemble F ou G est inclus dans l'autre.
4. E est-il inclus dans G ?
5. Déterminer l'ensemble G en extension.

Exercice II.4. 1. Soit $E = \{e\}$ un singleton. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

2. Soit $E = \{a, b, c\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$.
3. Déterminer $\mathscr{P}(\emptyset)$, puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$.
4. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Déterminer $(E \times E) \setminus \{(x, x) \mid x \in E\}$.

Exercice II.5. Soit $E = [\![1, 4]\!]$. Soient $A = \{(i, j) \in E^2 \mid i < j\}$, $B = \{(i, j) \in E^2 \mid i = j\}$ et $C = \{(i, j) \in E^2 \mid i > j\}$. Montrer que (A, B, C) forme une partition de E^2.

Exercice II.6. Écrire sous forme d'un intervalle en justifiant les ensembles :

1. $A = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n]$
2. $B = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$
3. $C = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$
4. $D = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]0, 1 + \frac{1}{n}\right[$

Exercice II.7. Soit E un ensemble. Montrer par contraposée que :

1. $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
2. $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice II.8. Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$. Étudier la réciproque.
2. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$. Étudier la réciproque.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4. $A \subset B \iff A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exercice II.9. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que $E = A \cup B \cup C$. Soit $D \in \mathscr{P}(E)$ vérifiant : $A \cap D \subset B$, $B \cap D \subset C$ et $C \cap D \subset A$.
Montrer que $D \subset A \cap B \cap C$.

Exercice II.10. Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et B par : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et faire un dessin.
2. On suppose que $A \Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
3. Soit $C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C \iff B = C$.
4. Résoudre l'équation $A \Delta X = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Exercice II.11. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Résoudre l'équation : $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 : $\forall m, n \in \mathbb{N}, A \Rightarrow B$ est vraie : soient $m, n \in \mathbb{N}$. On suppose que m et n sont pairs. Il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2k$ et $n = 2l$. Alors $m + n = 2(k + l)$, donc $m + n$ est un entier.
Les deux autres sont fausses : en prenant $m = 3$ et $n = 1$, on a B vraie, mais A fausse.
Exercice I.2 :

1. La fonction f n'est pas la fonction nulle : $\exists x \in I \mid f(x) \neq 0$, négation : $\forall x \in I, f(x) = 0$.
2. La fonction f ne s'annule jamais : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$, négation : $\exists x \in I \mid f(x) = 0$.
3. La fonction f est majorée par 5 : $\forall x \in I, f(x) \leq 5$, négation : $\exists x \in I \mid f(x) > 5$.
4. La fonction f est bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, |f(x)| \leq M$, négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I \mid |f(x)| > M$.
5. Tout réel admet un antécédent par f : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I \mid f(x) = y$, négation : $\exists y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, f(x) \neq y$.
6. 0 est le seul antécédent de 0 par f : $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, négation : $\exists x \in I \mid f(x) = 0$ et $x \neq 0$.
7. La fonction f est ni croissante ni décroissante sur I : $\exists x, y \in I \mid x \leq y$ et $f(x) > f(y)$ et $\exists z, t \in I \mid z \leq t$ et $f(z) < f(t)$.

Exercice I.3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par disjonction de cas :
   - si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Donc $n^2 - 3n + 2 = 4k^2 - 6k + 2 = 2(2k^2 - 3k + 1)$ qui est bien un nombre pair ;
   - si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Donc $n^2 - 3n + 2 = 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 2 = 2(2k^2 - k)$ qui est aussi un nombre pair.

   Dans les deux cas, $n^2 - 3n + 2$ est pair.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par disjonction de cas suivant le reste de la division euclidienne de n par 3.
   - si $n = 3k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $n^3 - n = 3(9k^2 - k)$ qui est bien divisible par 3 ;
   - si $n = 3k+1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors $n^3 - n = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k)$ qui est divisible par 3 ;
   - si $n = 3k + 2$, on a encore pareil.

   Dans tous les cas, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice I.4 :

1. On raisonne par contraposée : supposons que $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$ et $\dfrac{|a|}{2} > 0$. De plus, $|a| > \dfrac{|a|}{2}$: il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $|a| > \varepsilon$. Par contraposée, $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. On raisonne par la contraposée : supposons que $a > b$. Alors $b + \dfrac{a-b}{2} \leq a$ et $\dfrac{a-b}{2} > 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a \leq b + \varepsilon$. Par contraposée, $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.
3. On raisonne par double implication :
   - $\Leftarrow$: supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $a < c < b$. Alors, on a $a < b$. On a donc $(\exists c \in \mathbb{R} \mid a < c < b) \Rightarrow a < b$.
   - $\Rightarrow$: supposons que $a < b$. On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$. Comme $a < b$, alors $2a < a + b < 2b$, donc $a < c < b$.

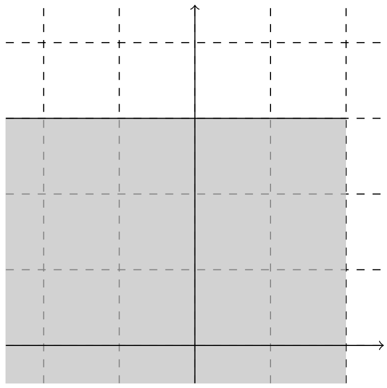
Exercice I.5 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons par l'absurde que $|z+1| < 1$ et $|z-1| < 1$. Alors $|2| = |1 + z + 1 - z| \leq |z+1| + |z-1| < 2$. On a une contradiction.
Exercice I.6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Analyse : supposons que f s'écrit $f = g + h$ avec g paire et h impaire. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = g(x) - h(x)$, donc $f(x) + f(-x) = 2g(x)$ et $f(x) - f(-x) = 2h(x)$.
Synthèse : Posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On vérifie que g est paire, h impaire et $f = g + h$. On a unicité d'après l'analyse.
Exercice I.7 :

1. Analyse : si f convient, alors pour $x = y = 0$, on a $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc soit $f(0) = 0$, soit $f(0) = 1$. Dans le deuxième cas, en prenant $y = 0$ et x quelconque : $f(x) = x + 1$. Dans le premier cas, si $y = 0$ et $x = 1$, on trouve $0 = 1$, ce qui est faux.
   Synthèse : soit $f(x) = x + 1$. On vérifie que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+1)(y+1) - (xy+1) = x + y$, donc f convient, et c'est la seule fonction solution.
2. Analyse : si f convient, alors pour $x = 0$, on trouve $f(y) = f(0) + y$. La fonction f est donc affine de coefficient directeur 1.
   Synthèse : Soit $f(x) = x + b$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $f(x+y) = x + y + b = (x+b) + y = f(x) + y$. Donc f est bien solution du problème.

Exercice I.8 : Commencer par écrire la liste des âges possibles dont le produit fait 36 par ordre croissant. D'autre part, si le marin ne parvient pas à trouver les âges avec les deux premières informations, c'est qu'elle ne permettent pas de départager deux possibilités de la liste...

Exercice II.1 :

1. $[1,2[=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 1 \text{ et } x<2\}$, donc $\overline{[1,2[}=\{x\in\mathbb{R}\mid x<1 \text{ ou } x\geq 2\}=]-\infty,1[\cup[2,+\infty[$.
2. Son complémentaire est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geq 2 \text{ ou } y>3\}$.



3. On procède par double inclusion.
   - $\supset$: soit $(x,y)\in B$. Alors, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $x=3t-1$ et $y=-2t+1$. On obtient alors $2x+3y=1$, donc $(x,y)\in A$.
   - $\subset$: soit $(x,y)\in A$. On pose $t=(x+1)/3$, de sorte que $x=3t-1$. Puis, $y=\dfrac{-2x+1}{3}=\dfrac{-6t+2+1}{3}=-2t+1$. Donc $(x,y)\in B$.

Exercice II.2 :

1. On raisonne par double inclusion :
   - $\supset$: soit $y\in]-\infty,0]$. Prenons $\varepsilon>0$. Alors $y\leq 0<\varepsilon$. Donc $\forall\varepsilon>0,\ y<\varepsilon$. Ainsi, $y\in\{x\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0, x<\varepsilon\}$.
   - $\subset$: soit $y\in\{x\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0, x<\varepsilon\}$. Supposons par l'absurde que $y>0$. Alors $y>\dfrac{y}{2}>0$, donc il existe $\varepsilon>0$ avec $y\geq\varepsilon$: c'est impossible par hypothèse. Donc $y\leq 0$ et $y\in]-\infty,0]$.

   Par double inclusion : $\{x\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0, x<\varepsilon\}=]-\infty,0]$.
2. On raisonne par double inclusion :
   - $\subset$: soit $c\in[a,b]$. On cherche t tel que $c=ta+(1-t)b$. On a donc $c-b=t(a-b)$ et $t=\dfrac{c-b}{a-b}$ (car $a\neq b$). On pose donc $t=\dfrac{c-b}{a-b}$. On a alors $c=ta+(1-t)b$. Il reste à vérifier que $t\in[0,1]$. Or, $t=\dfrac{b-c}{b-a}$. Comme $b-c\geq 0$ et $b-a>0$, on a bien $t\geq 0$ et comme $c\geq a$, $b-c\leq b-a$, donc $t\leq 1$.
   - $\supset$: soit $c=ta+(1-t)b$ pour un certain $t\in[0,1]$. Comme $a<b$ et $t\geq 0$, $ta\leq tb$, donc $c\leq tb+(1-t)b=b$. D'autre part, $1-t\geq 0$, donc $(1-t)a\leq(1-t)b$, donc $ta+(1-t)a\leq c$. On a bien $c\in[a,b]$.

   Par double inclusion, $[a,b]=\{ta+(1-t)b,\text{ avec } t\in[0,1]\}$.

Exercice II.3 :

1. F est l'ensemble des complexes x tels qu'il existe un entier n avec $x^n=x$. G est l'ensemble des complexes x tels que pour tout entier naturel n, $x^n=x$.
2. On remarque que $0^1=0$, donc $0\in F$ et $1^1=1$, donc $1\in F$. Donc $E\subset F$.
3. Montrons que $G\subset F$. Soit $x\in G$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x^n=x$. En particulier, $x^1=x$. Donc $x\in F$. D'où $G\subset F$.
4. Non car $0^0\neq 0$, donc $0\notin G$.
5. Soit $x\in G$. On a en particulier, $x^0=x$, donc $x=1$. Donc $G=\{1\}$.

Exercice II.4 :

1. $\mathscr{P}(E)=\{\emptyset,\{e\}\}$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{e\}\},\{\emptyset,\{e\}\}\}$.
2. $\mathscr{P}(E)=\{\emptyset,E,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$.
3. $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.
4. $(E\times E)\setminus\{(x,x)\mid x\in E\}=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,2),(3,1)\}$.

Exercice II.5 : Soit $(i,j)\in E^2$. Alors on a soit $i<j$ et $(i,j)\in A$, soit $i=j$ et $(i,j)\in B$, soit $i>j$ et $(i,j)\in C$. Donc $E=A\cup B\cup C$. De plus, $A\cap B=\emptyset=A\cap C=B\cap C$.

Exercice II.6 : On raisonne à chaque fois par double inclusion : $A=[0,+\infty[$, $B=[0,1]$, $C=[0,1]$, $D=]0,1]$. **Exercice II.7 :**

1. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $A \neq B$ et montrons que $A \cap B \neq A \cup B$. Comme $A \neq B$, on a deux cas :
   - soit $x \in A$ avec $x \notin B$. Alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$;
   - soit $x \in B$ avec $x \notin A$. Alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$.

   Dans les deux cas, $A \cup B \neq A \cap B$.
2. Soit $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $B \neq C$ et montrons que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Comme $B \neq C$, on a deux cas :
   - soit $x \in B$ et $x \notin C$. Alors, si $x \in A$, $x \in A \cap B$ et $x \notin A \cap C$. Sinon, $x \notin A$ donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cup C$.
   - soit $x \in C$ et $x \notin B$. On raisonne de même qu'avant.

   Dans tous les cas, $A \cup B \neq A \cup C$ ou $A \cap B \neq A \cap C$.

Exercice II.8 :

1. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cup C$. Si $x \in A$, alors $x \in B \subset B \cup C$, et si $x \in C$, alors $x \in B \cup C$. Donc $A \cup C \subset B \cup C$. Si on prend $B = \emptyset$, $A = C = E$, alors $A \cup C = E \subset B \cup C = E$, mais $A \not\subset B$.
2. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A \cap C$. Comme $x \in A$, on a $x \in B$, donc $x \in B \cap C$. Ainsi $A \cap C \subset B \cap C$. Si on prend $B = C = \emptyset$, $A = E$, alors $A \cap C = \emptyset \subset B \cap C = \emptyset$, mais $A \not\subset B$.
3. Soit $x \in A \cup (B \cap C)$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Si $x \in B \cap C$, alors $x \in B \subset A \cup B$ et $x \in C \subset A \cup C$. Donc $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$, donc si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$. Sinon, $x \in B$, et comme $x \in A \cup C$, on a aussi $x \in C$. Donc $x \in B \cap C$. Ainsi $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
4. Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A$, alors $x \in B$, donc $x \notin \overline{B}$. Soit $x \in \overline{B}$, alors $x \notin B$, donc $x \notin A$. Ainsi, $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
   Supposons que $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Soit $x \in A$, alors $x \notin \overline{B}$, donc $x \in B$. D'où $A \subset B$.

Exercice II.9 : Soit $x \in D$. Comme $E = A \cup B \cup C$, on a trois cas suivant si x est dans A, B ou C. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap D$, donc $x \in B$, puis $x \in B \cap D$, donc $x \in C$. D'où $x \in A \cap B \cap C$. On raisonne de même si $x \in B$, ou si $x \in C$.

Exercice II.10 :

1. Soit $x \in A \Delta B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. On a deux cas : si $x \in A$, alors $x \notin B$, donc $x \in A \setminus B$. Si $x \in B$, alors $x \notin A$ et $x \in B \setminus A$. Donc $A \Delta B \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   Soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Soit $x \in A \setminus B$ et alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. De même si $x \in B \setminus A$. Donc $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A \Delta B$.
2. Par définition, $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. Donc $(A \Delta B) \cap (A \Delta B) = \emptyset$ par hypothèse. Donc $A \Delta B = \emptyset = A \cap B$. D'où $A \cup B = \emptyset$, et $A = B = \emptyset$.
3. Si $B = C$, on a bien $A \Delta B = A \Delta C$. Réciproquement, supposons que $A \Delta B = A \Delta C$. Soit $x \in B$. On a soit $x \notin A$, soit $x \in A$. Dans le premier cas, $x \in A \Delta C$, donc $x \in C$. Dans le deuxième cas, $x \notin A \Delta C$, mais $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cap C$. Ainsi, $B \subset C$. On procède de même pour $C \subset B$.
4. On remarque que $A \Delta A = \emptyset$. D'après la question précédente, $X = A$ est la seule solution.

Exercice II.11 : On remarque déjà que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset A \cup X$. Ainsi, si $A \not\subset B$, l'équation n'a pas de solution.
Supposons que $A \subset B$. Si X est une solution, alors $X \subset B$. De plus, si $x \in B \setminus A$, alors $x \in X$. Donc $B \setminus A \subset X \subset B$.
Réciproquement, soit $X \in \mathscr{P}(B)$ telle que $B \setminus A \subset X$. Alors $B = A \cup (B \setminus A) \subset A \cup X \subset B$, donc $B = A \cup X$.