Contrôle de cours 8 - Logique, ensembles, parties de $\mathbb{R}$, arithmétique - Sujet A
Mercredi 3 décembre 2025

Question 1 (2 pts)

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

1. Donner la définition de : $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$.
2. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E si :
   - $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
   - $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

☐

Question 2 (1 pt)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

1. On dit que M est un majorant de A si (avec des quantificateurs) : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
2. On dit que m est le minimum de A si : m est un minorant de A et $m \in A$.

☐

Question 3 (1,5 pt)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Quand est-ce que A admet une borne supérieure ?
   D'après la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure si elle est non vide et majorée.
2. Dans ce cas, qu'est-ce que la borne supérieure de A ?
   C'est le plus petit majorant de A.
3. Compléter :

$$M = \sup(A) \iff M \text{ est un majorant et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \mid M - \varepsilon < x \leq M$$

Question 4 (2 pts)

1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Compléter avec $\in$, $\notin$ ou $\subset$:

$$a \in E, \quad \{a\} \subset E, \quad a \notin \mathscr{P}(E), \quad \{a\} \in \mathscr{P}(E), \quad \emptyset \in \mathscr{P}(E)$$

2. Soit A et B deux parties d'un ensemble. Simplifier $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.
   On utilise les propriétés du cours : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap B = E \cap B = B$.

☐

Question 5 (2 pts)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour deux entiers relatifs a et b.
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. ☐

Question 6 (2 pts)

Calculer le PGCD de 195 et 351.
On calcule les divisions euclidiennes successives : $\mathrm{PGCD}(351, 195) = \mathrm{PGCD}(195, 156) = \mathrm{PGCD}(156, 39) = \mathrm{PGCD}(39, 0) = 39$. ☐

Question 7 (2 pts)

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = t+2 \text{ et } y = 3t+5\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y - 1 = 0\}$. Montrer que $A \subset B$.
Soit $(x, y) \in A$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+2$ et $y = 3t+5$. Donc $3x - y - 1 = 3(t+2) - (3t+5) - 1 = 0$. Donc $(x, y) \in B$. Ainsi, $A \subset B$. □

Question 8 (4 pts)

Soit E un ensemble.

1. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Écrire la définition de $A \subset B$ et sa négation.
   $A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$, $A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B$.
2. Montrer en utilisant la contraposée que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
   Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $A \neq B$. Alors deux cas se présentent :
   - il existe $x \in A$ avec $x \notin B$: alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$. D'où $A \cup B \neq A \cap B$;
   - il existe $x \in B$ avec $x \notin A$: alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$. D'où $A \cup B \neq A \cap B$;

   Dans les deux cas, $A \cap B \neq A \cup B$.
   Donc par contraposée, $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$. □

Contrôle de cours 8 - Logique, ensembles, parties de $\mathbb{R}$, arithmétique - Sujet B
Mercredi 3 décembre 2025

Question 1 (2 pts)

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

1. Donner la définition de : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.
2. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de E si :
   - $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$
   - $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

☐

Question 2 (1 pt)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M, m \in \mathbb{R}$.

1. On dit que m est un minorant de A si (avec des quantificateurs) : $\forall x \in A,\ x \geq m$.
2. On dit que M est le maximum de A si : M est un majorant de A et $M \in A$.

☐

Question 3 (1,5 pt)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Quand est-ce que A admet une borne inférieure?
   D'après la propriété de la borne supérieure, A admet une borne inférieure si elle est non vide et minorée.
2. Dans ce cas, qu'est-ce que la borne inférieure de A?
   C'est le plus grand des minorants de A.
3. Compléter :

$$m = \inf(A) \iff m \text{ est un minorant et } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \mid m \leq x < m + \varepsilon$$

Question 4 (2 pts)

1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Compléter avec $\in$, $\notin$ ou $\subset$:

$$a \in E, \quad \{a\} \subset E, \quad a \notin \mathscr{P}(E), \quad \{a\} \in \mathscr{P}(E), \quad \emptyset \in \mathscr{P}(E)$$

2. Soit A et B deux parties d'un ensemble. Simplifier $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$.
   On utilise les propriétés du cours : $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \emptyset \cup B = B$.

☐

Question 5 (2 pts)

Énoncer le théorème de la division euclidienne pour deux entiers relatifs a et b.
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. ☐

Question 6 (2 pts)

Calculer le PGCD de 247 et 285.
On calcule les divisions euclidiennes successives : $\mathrm{PGCD}(285, 247) = \mathrm{PGCD}(247, 38) = \mathrm{PGCD}(38, 19) = \mathrm{PGCD}(19, 0) = 19$.

☐

Question 7 (2 pts)

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = 3t + 5 \text{ et } y = t + 2\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x + 3y - 1 = 0\}$. Montrer que $A \subset B$.

Soit $(x, y) \in A$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 3t + 5$ et $y = t + 2$. Donc $-x + 3y - 1 = -3t - 5 + 3(t + 2) - 1 = 0$. Ainsi, $(x, y) \in B$. Donc $A \subset B$. □

Question 8 (4 pts)

Soit E un ensemble.

1. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Écrire la définition de $A \subset B$ et sa négation.
   $A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$, $A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B$.
2. Montrer en utilisant la contraposée que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$.
   Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $A \neq B$. Alors deux cas se présentent :
   - il existe $x \in A$ avec $x \notin B$: alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$. D'où $A \cup B \neq A \cap B$;
   - il existe $x \in B$ avec $x \notin A$: alors $x \in A \cup B$, mais $x \notin A \cap B$. D'où $A \cup B \neq A \cap B$;

   Dans les deux cas, $A \cap B \neq A \cup B$.
   Donc par contraposée, $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$. □