Chapitre 13 : Applications

I. Généralités

Définition I.1. Soient E et F deux ensembles non vides. Une **application** de E dans F est une correspondance qui à chaque élément x de E associe un unique élément $f(x)$ de F. On écrit en général :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou bien F^E l'ensemble des applications de E dans F.
Le graphe de l'application f est l'ensemble $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F$.

Exemples I.1.
1. Soit E un ensemble. L'application identité de E est $\mathrm{id}_E : E \to E$ définie par : $\forall x \in E$, $\mathrm{id}_E(x) = x$.
2. Soit E un ensemble et A une partie de E. La fonction **indicatrice** de A est la fonction $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Définition I.2. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$.
- E est l'ensemble de départ de f.
- F est l'ensemble d'arrivée de f.
- Pour tout $x \in E$, l'unique $y \in F$ tel que $y = f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f.
- Pour tout $y \in F$, tout $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y par f.

Définition I.3. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(E',F')$. On dit que f et g sont égales si :
- $E = E'$
- $F = F'$
- $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

II. Prolongement, restriction, composition

Définition II.1. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $E' \subset E$ non vide. La **restriction** de f à E' est l'application $f_{|E'} : E' \to F$ telle que $\forall x \in E', f_{|E'}(x) = f(x)$.
Une application f est le **prolongement** d'une application g lorsque g est une restriction de f.

Exemples II.1.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. L'application f n'est pas croissante sur son ensemble de définition. Par contre, la fonction $f_{|[0,\pi/2]}$ est croissante.
- Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = g(x)$ et $f(0) = 1$ est un prolongement de g. Comme on a vu au chapitre 3, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, donc f est le prolongement continu de g.
- La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un prolongement de l'exponentielle réelle.

Définition II.2. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$. La composition de g et f est l'application $g \circ f \in \mathscr{F}(E,G)$ définie par :

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

III. Images directe et réciproque

Définition III.1. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $A \subset E$. On note

$$f(A) = \{f(x),\ \text{avec } x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

l'**image directe** de A par f.
C'est l'ensemble des images des éléments de A par f. On note $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

Exemples III.1.
- Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n+1$. Alors $f(\{0,1\}) = \{1,2\}$ et $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Alors $g(]-1,2]) = [0,4]$ et $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Proposition III.1. *Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(F,G)$ et A et B deux parties de E.*
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $g \circ f(A) = g(f(A))$.

Définition III.2. Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $B \subset F$. On note

$$f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

l'**image réciproque** de B par f.
C'est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

Remarque III.1. Attention, l'application réciproque f^{-1} n'existe pas toujours, mais on peut toujours prendre l'image réciproque d'un ensemble.

Exemples III.2.
- On a toujours $f^{<-1>}(F) = E$ et $f^{<-1>}(\emptyset) = \emptyset$.
- $\sin^{<-1>}([-2,2]) = \mathbb{R}$ et $\sin^{<-1>}([2,+\infty[) = \emptyset$.
- $g^{<-1>}(\{1\}) = \{-1,1\}$, $g^{<-1>}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$ et $g^{<-1>}(\mathbb{R}_-^*) = \emptyset$.

Proposition III.2. *Soit $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $g \in \mathscr{F}(G,E)$ et A et B deux parties de F.*
- $A \subset B \Rightarrow f^{<-1>}(A) \subset f^{<-1>}(B)$
- $f^{<-1>}(A \cup B) = f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B)$
- $f^{<-1>}(A \cap B) = f^{<-1>}(A) \cap f^{<-1>}(B)$
- $(f \circ g)^{<-1>}(A) = g^{<-1>}(f^{<-1>}(A))$.

Proposition III.3. *Soit $f : \mathscr{F}(E,F)$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.*
1. $A \subset f^{<-1>}(f(A))$;
2. $f(f^{<-1>}(B)) \subset B$.

IV. Injections, surjections, bijections

Définition IV.1. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **injective** si tout élément de F a au plus un antécédent :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Par contraposée, f est injective ssi

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'),$$

c'est-à-dire que deux éléments différents de E ont des images différentes.

Remarque IV.1. Un fonction injective est « réversible » : si on connaît $f(x)$ on peut retrouver x sans ambiguité.

Exemples IV.1.
- La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective, mais $\sin_{|[0,\pi/2]}$ est injective.
- La fonction nom : PCSI2→ {mots} est injective, mais pas la fonction prénom.

Méthode.
1. Pour montrer que $f : E \to F$ est injective,
   - on fixe deux éléments x et x' de E ;
   - on suppose que $f(x) = f(x')$;
   - on montre que $x = x'$.
2. Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments x et x' de E qui sont **différents** et tels que $f(x) = f(x')$.

Proposition IV.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur l'intervalle I. Alors f est injective.*

Définition IV.2. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x).$$

Exemples IV.2. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective. Par contre $f : x \in \mathbb{R} \to \sin x \in [-1,1]$ est surjective. Mais $f_{|[0,\pi/2]}$ n'est pas surjective.

Méthode.
1. Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective,
   - on fixe un élément $y \in F$;
   - on trouve un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
2. Pour montrer que $f : E \to F$ n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément $y \in F$ qui n'a pas d'antécédent par f.

Proposition IV.2. *Une application $f \in \mathscr{F}(E,F)$ est surjective ssi $f(E) = F$.*

Définition IV.3. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \mid y = f(x).$$

Exemple IV.3. L'application identité $\mathrm{id}_E : x \in E \to x \in E$ est une bijection.

Définition IV.4. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications. On dit que l'application g est l'**application réciproque** de f lorsque $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$:

$$\forall x \in E, g(f(x)) = x \text{ et } \forall y \in F, f(g(y)) = y.$$

On note alors $g = f^{-1}$.

Proposition IV.3. *Une application $f \in \mathscr{F}(E,F)$ est bijective ssi elle admet une application réciproque.*

On a donc deux techniques pour montrer qu'une application est bijective : soit on montre qu'elle est injective et surjective, soit on trouve une application réciproque.

Proposition IV.4. *Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$.*
- *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
- *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*
- *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*