Applications - Exercices

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices :

1. $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
4. $1 - \mathbb{1}_A$
5. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
6. $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$

Exercice 2. Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E. On rappelle que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_{A\cap B}$.
2. Soit $C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 3. Déterminer $f(\mathbb{R}_+), f(\mathbb{R}_-), f(\{-1\}), f^{<-1>}(\mathbb{R}_+), f^{<-1>}(\mathbb{R}_-)$ et $f^{<-1>}(\{-1\})$ pour les fonctions suivantes :
a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \ln x$; c) $f(x) = \cos x$

Exercice 4.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $]-1,1[$.
3. Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 5. On considère l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{<-1>}(\{y\})$ pour tout réel y.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possibles, tels que $f : I \to J$ soit bijective.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

Exercice 7. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{si } n \text{ est pair.} \\ \dfrac{n-1}{2} \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$

Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 8. On définit l'application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (x + y, xy)$. F est-elle injective, surjective, bijective ? Même question avec $G(x, y) = (x, xy - y^3)$ et $H(x, y) = (1, x + y, x - y)$.

Exercice 9. On définit l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

f est-elle injective, surjective, bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre O et de rayon 1. Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 10. On définit les fonctions réelles suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} A_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} A_2 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \qquad f_3 : \begin{cases} A_3 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} A_4 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 2 \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} A_5 = [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases} \qquad f_6 : \begin{cases} A_6 =]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$$

1. Pour tout $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$:
   (a) Tracer la courbe représentative de f_i.
   (b) Dire si f_i est une injection, une surjection, une bijection.
   Dans chacun des cas, si f_i n'est pas bijective, on déterminera des ensembles E_i et F_i tels que $f_{i|E_i}$ est une bijection de E_i sur F_i.
   (c) Déterminer les ensembles $f_i(A_i), f_i(]0,2])$ et $f_i^{<-1>}(]-1,1[)$.

2. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de chacune des applications suivantes :

$$a)\ \ f_1 \circ f_2 \qquad b)\ \ f_2 \circ f_1 \qquad c)\ \ f_4 \circ f_5 \qquad d)\ \ f_6 \circ f_5$$

Exercice 11. Soient E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application.

1. On suppose que f est surjective. Montrer que $f \circ f$ est surjective.
2. On suppose que f vérifie : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 12. Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$.

1. Montrer que si f est surjective et $g \circ f$ est injective, alors g est injective.
2. Montrer que si g est injective et $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 13. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1. f est injective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E), f^{<-1>}(f(A)) = A$.
   Que peut-on dire si f n'est pas injective ?
2. f est surjective $\iff \forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{<-1>}(B)) = B$.
   Que peut-on dire si f n'est pas surjective ?

Exercice 14. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 15. Soit E un ensemble non vide. On note $Bij(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E.

1. Montrer que si f et g sont dans $Bij(E)$, alors $f \circ g \in Bij(E)$.
   On dit que $\circ : Bij(E) \times Bij(E) \to Bij(E)$ est une **loi interne**.
2. Montrer que : $\forall f, g, h \in Bij(E), (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
   On dit que la loi interne $\circ$ est **associative**.
3. Justifier que l'application $\mathrm{id}_E : x \in E \mapsto x \in E$ est dans $Bij(E)$, et montrer que : $\forall f \in Bij(E), f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f$.
   On dit que id_E est un **élément neutre** pour la loi $\circ$.
4. Justifier que $\forall f \in Bij(E), \exists g \in Bij(E), f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   On dit que tous les éléments de $Bij(E)$ admettent un inverse pour la loi $\circ$.
   On dit que $(Bij(E), \circ)$ est un **groupe**.
5. On suppose que E a au moins 3 éléments. Trouver deux applications $f, g \in Bij(E)$ telles que $f \circ g \neq g \circ f$.
   On dit alors que $(Bij(E), \circ)$ n'est pas **commutatif**.