Parties de $\mathbb{R}$ - Exercices

Exercice 1.

1. Montrer que si a et b sont deux nombres rationnels avec $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est-il stable par somme ? par produit ?

Exercice 3. Déterminer si elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :

1. $A_1 = \{1 + n, n \in \mathbb{N}\}$
2. $A_2 = \left\{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
3. $A_3 = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
4. $A_4 = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $A_5 = \left\{\dfrac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
6. $A_6 = \left\{2\sin(x) + \cos(y) + 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
7. $A_7 = \left\{\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}, (m, n) \in \left(\mathbb{Z}^*\right)^2\right\}$
8. $A_8 = \left\{5\sin(x) - e^y + 3, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 4.

1. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. Montrer que $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(B) \leq \inf(A)$.
3. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On note $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$.
   (a) Montrer que A est majorée et B et minorée et que $\sup(A) \leq \inf(B)$.
   (b) Donner un exemple avec $\sup(A) = \inf(B)$.
5. * Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$.

Exercice 5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble B par : $B = \{tx + (1-t)y \mid (x, y) \in A^2, t \in [0, 1]\}$.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On suppose dans cette question que $A = \{a, b\}$. Que vaut B ?
2. Montrer que B est borné et $\sup(B) = \sup(A)$ et $\inf(B) = \inf(A)$.
3. Montrer que B est un intervalle.

Exercice 6. Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde que $r = a + b\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, $\sqrt{2} = \dfrac{r-a}{b}$ est aussi rationnel, ce qui est une contradiction !
2. Montrons par l'absurde que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$. Supposons pour cela que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$. On obtient alors que $q \ln 2 = p \ln 3$. En passant à l'exponentielle, on obtient une contradiction.
3. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est rationnel. Alors $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 5+2\sqrt{6}$ l'est aussi, puis $\sqrt{6} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}{2}$ aussi. Or on vérifie comme dans le cours que $\sqrt{6}$ n'est pas rationnel, ce qui est une contradiction.

Exercice 2 : Ni l'un ni l'autre : $\sqrt{2}, 1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, mais $1 = \sqrt{2}+1-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Puis, $\sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3 :

1. $\forall x \in A_1, x \geq 1$ et $1 \in A_1$, donc $\inf A_1 = 1$. Si $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq M$, donc $1+n > M$. Ainsi, A_1 n'a pas de majorant donc pas de borne supérieure.
2. $\inf A_2 = 1$, $\sup A_1 = 2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n + \dfrac{1}{n} \geq -1$, donc -1 est un minorant. Soit $m > -1$, prenons $n = \left\lfloor \dfrac{1}{m-(-1)} \right\rfloor$. Alors $2n+1 > \dfrac{1}{m-(-1)}$, d'où $\dfrac{1}{2n+1} < m+1$ et $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} < m$. Donc $\inf A_3 = -1$. Lorsque n est impair, $(-1)^n + \dfrac{1}{n} \leq 0$. Lorsque n est pair $(-1)^n + \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ qui décroit. Donc $\sup A_3 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.
4. $\inf A_4 = 0$, $\sup A_4 = \dfrac{3}{2}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2n}{n+1} \geq 0$, et on a égalité pour $n = 0$, donc $\inf A_5 = 0$. $\dfrac{2n}{n+1} \leq 2$, donc 2 est un majorant de A_5. Puis, si $M < 2$, prenons $n > \dfrac{M}{2-M}$. On a alors $(2-M)n > M$ et $2n > M(n+1)$, donc $M < \dfrac{2n}{n+1}$ et M n'est pas un majorant. Donc $\sup A_5 = 2$.
6. -2 est un majorant de A_6 et 4 est un minorant. En prenant $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $y = -\pi$ on trouve que $\inf A_6 = -2$. En prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $y = 0$, on trouve que $\sup A_6 = 4$.
7. A_7 est majorée par 1 et minorée par -1, car $\dfrac{1}{m} \leq 1$ et $-\dfrac{1}{n} \geq -1$. Ce sont les bornes inférieure et supérieure de A_7.
8. A_8 n'est pas minorée car e^y tend vers $+\infty$ lorsque y tend vers $+\infty$. Par contre, $\sup A_8 = 8$.

Exercice 4 :

1. Comme $\sup A > 0$, $0 < \dfrac{\sup A}{2} < \sup A$. Par définition de la borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $x \geq \dfrac{\sup A}{2} > 0$.
2. $\sup B$ est un majorant de B, et donc de A car $A \subset B$. Donc $\sup B \geq \sup A$. Même chose avec les bornes inférieures.
3. On a pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$, $x \leq \sup(A)$ et $y \leq \sup(B)$, donc $x+y \leq \sup(A)+\sup(B)$. Ainsi, $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de $A+B$ et $\sup(A+B) \leq \sup(A)+\sup(B)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $\sup(A)-\dfrac{\varepsilon}{2} < x \leq \sup(A)$ et $\sup(B)-\dfrac{\varepsilon}{2} < y \leq \sup(B)$. Donc $\sup(A)+\sup(B)-\varepsilon < x+y \leq \sup(A)+\sup(B)$. Donc $\sup(A)+\sup(B) = \sup(A+B)$.
4. (a) Comme B est non vide, on prend $b_0 \in B$ et $\forall a \in A, a < b_0$: A est majorée. De même B est minorée.
   Soit $b \in B$, alors pour tout $a \in A$, $a < b$: b est un majorant de A, donc $\sup(A) \leq b$. Ainsi, $\forall b \in B$, $b \geq \sup(A)$: $\sup(A)$ est un minorant de B donc $\inf(B) \geq \sup(A)$.

   (b) $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$.
5. Pour tout $a \in A$, $\sqrt{a} \leq \sqrt{\sup(A)}$ car f est croissante. Donc $\sqrt{A}$ est majorée par $\sqrt{\sup(A)}$. Prenons $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\sqrt{\sup(A)}-\varepsilon \leq \sqrt{\sup(A)-\alpha}$, car $\lim\limits_{h\to 0^+} \sqrt{\sup(A)-h} = \sqrt{\sup(A)} > \sqrt{\sup(A)}-\varepsilon$. Il existe alors $a \in A$ tel que $\sup(A)-\alpha < a \leq \sup(A)$. Donc $\sqrt{\sup(A)}-\varepsilon \leq \sqrt{\sup(A)-\alpha} < \sqrt{a} \leq \sqrt{\sup(A)}$. On a bien $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$.

Exercice 5 :

1. On l'a vu au chapitre 10 : $B = [a,b]$.
2. Pour tout $(x,y) \in A^2$, et tout $t \in [0,1]$, $tx+(1-t)y \leq t\sup(A)+(1-t)\sup(A) = \sup(A)$ et $tx+(1-t)y \geq t\inf(A)+(1-t)\inf(A) = \inf(A)$ car $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$. Ainsi, B est borné et $\sup(B) \leq \sup(A)$ et $\inf(B) \geq \inf(A)$.
   En prenant $t = 1$ dans la définition de B, on remarque que $A \subset B$, donc $\sup(B) \geq \sup(A)$ et $\inf(B) \leq \inf(A)$.
   Ainsi, $\sup(A) = \sup(B)$ et $\inf(A) = \inf(B)$.
3. On utilise la caractérisation vue en cours : soient $a, b \in B$, il existe $(x,y) \in A^2$ et $(x',y') \in A^2$ tels que $a \in [x,y]$ et $b \in [x',y']$. On pose $X = \min(x,x') \in A$ et $Y = \max(y,y') \in A$. On a alors $a, b \in [X,Y]$. Soit $c \in [a,b]$. Alors $c \in [X,Y]$, donc $c \in B$. Ainsi, $[a,b] \subset B$.

Exercice 6 : Soit I et J deux intervalles. Si $I \cap J = \emptyset$, alors c'est bon. Supposons donc que $I \cap J \neq \emptyset$ et prenons $a, b \in I \cap J$ avec $a \leq b$. Comme I et J sont des intervalles, $[a,b] \subset I$ et $[a,b] \subset J$, donc $[a,b] \subset I \cap J$. Donc $I \cap J$ est un intervalle d'après la caractérisation donnée dans le cours.