Suites numériques - Exercices

I. Généralités

Exercice I.1. Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
4. $z_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice I.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice I.3.
1. Montrer que la somme de deux suites stationnaires est stationnaire.
2. Que dire de la somme de deux suites croissantes ?

Exercice I.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,4]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{|u_n|}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \sqrt{x}$.
2. Déterminer les points fixes de f et en déduire deux intervalles stables par f.
3. Justifier que (u_n) est bien définie et bornée.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice I.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Étudier rapidement la fonction f.
2. Déterminer les points fixes de f et en déduire deux intervalles stables par f.
3. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
4. Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice I.6. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre ?

1. $u_n = n^2 - 3n + 2$
2. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 4$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$
4. $u_n = \frac{3n+1}{2}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}$
6. $u_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}$

Exercice I.7. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
On considère la suite (z_n) de terme général $z_n = u_n + i v_n$. Déterminer le terme général de la suite (z_n) en fonction de n, puis en déduire les expressions de u_n et v_n.

Exercice I.8. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{2w_n + 3}{w_n + 4}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+4}$ et déterminer $f([0,1[)$.
2. Montrer que la suite (w_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [0,1[$.
3. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_n = \frac{w_n - 1}{w_n + 3}$.
   Montrer que (z_n) est géométrique.
5. En déduire le terme général de (w_n).

Exercice I.9. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Exercice I.10. Dans chaque cas, déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$

Exercice I.11. Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 > 0$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n^{\beta}$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

Exercice I.12 (E3A 2021 PC). 1. On note γ la racine positive du trinôme x^2-x-1. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définier par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
   (b) Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?
   i. $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$ ii. $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$ iii. $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$.
   (d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.
   (e) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

Exercice I.13. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = c2^n$, où c est une constante réelle. Justifier qu'il existe une unique valeur de c telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$.
2. Les suites (a_n) et (u_n) sont-elles égales ?
3. Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice I.14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
2. On suppose que (u_n) est strictement positive. Montrer que (u_n) est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$.

II. Convergence

Exercice II.1. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{5n^2+3n-1}{(2n+1)(n+2)}$

b) $u_n = \dfrac{2^n-1}{4^n-1}$

c) $u_n = \dfrac{n^2-3n+1}{1-n^2}$

d) $u_n = \dfrac{n^2+2}{e^n - n}$

e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

f) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$

g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

h) $u_n = \sqrt[n]{n}$

i) $u_n = \sqrt{n^4+n^2-2} - n^2 - n$

Exercice II.2. Étudier les suites de terme général (convergence ou divergence, et limite éventuelle) :

a) $u_n = \dfrac{n^2-1}{1+n!}$

b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n-n}$

d) $u_n = \dfrac{3n^2+\cos n}{4(n+1)^2+\sin 3n}$

e) $u_n = n(2+\cos n)$

f) $u_n = \dfrac{2n+\sin\left(3\exp\left(\frac{n!}{(\ln n)^n}\right)\right)}{n^2}$

g) $u_n = \dfrac{\lfloor (3n-\frac{1}{2})^2 \rfloor}{\lfloor (4n+\frac{1}{2})^2 \rfloor}$

h) $u_n = \dfrac{2+n(-1)^n}{n} + (-1)^n$

i) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n n}{1+\sqrt{n}}$

j) $u_n = \dfrac{(-1)^n n + \cos n}{n+1}$

k) $u_n = (2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

l) $u_n = \dfrac{1}{n^6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$

m) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$

n) $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{8}\right)$

o) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice II.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit M un majorant de A.

1. On suppose que $M = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $u_n \to M$.
2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $u_n \to M$. Montrer que $M = \sup(A)$.
3. Déterminer $\sup([0,1[)$.

Exercice II.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice II.5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes qui converge vers une limite finie ℓ. On pose pour tout $n>0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers ℓ.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs complexes telle que $u_{n+1}-u_n \to \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \to \ell$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.
4. Déterminer les limites de : $\dbinom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ et $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice II.6. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et tracer sa représentation graphique lorsque $u_0 = 5$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution de cette équation dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Déterminer $f([0,\alpha])$ et $f([\alpha,+\infty[)$.
4. On prend $u_0 \in [0,\alpha]$. Étudier la convergence de (u_n).
5. Même question avec $u_0 \in [\alpha,+\infty[$.
6. En suivant le même schéma, étudier la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [1,+\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2+7u_n}{2}} - 1 \end{cases}$. Que dire si $u_0 \in]0,1[$?

Exercice II.7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Soit $f : x \mapsto x - x^2$. Dresser le tableau de variations de f.
2. On suppose que $u_0 \in [0,1]$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) tend vers $-\infty$.
4. Étudier le cas où $u_0 > 1$.

Exercice II.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice II.9.

1. Montrer que pour tout entier $k>1$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Exercice II.10. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite (H_n).

Exercice II.11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice II.12.

1. Étudier la convergence de la suite $u_n = \cos(n\pi)$.
2. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On pose $c_n = \cos(n\theta)$ et $s_n = \sin(n\theta)$.
   (a) Exprimer c_{n+1} et s_{n+1} en fonction de c_n et s_n.
   (b) En déduire que (c_n) et (s_n) divergent.

Exercice II.13. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice II.14. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit $k \in]0,1[$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que :
   (a) si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$;
   (b) si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.

Exercice II.15. On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
Montrer que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire la nature de la suite (L_n).

Exercice II.16. On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est irrationnelle.

Exercice II.17. 1. Soient $a_n = n^2, b_n = (-1)^n(n^2 - 2n + 1), c_n = \ln(n)$ et $d_n = n^2 - \dfrac{5}{2}n + \sqrt{3}$. Vérifier que $b_n = O(a_n), c_n = o(a_n)$ et $d_n \sim a_n$.

2. Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites de termes généraux :

$$u_n = n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad v_n = 2n, \qquad w_n = \mathrm{e}^{-n}$$

   Montrer que $w_n = o(v_n)$. A-t-on $u_n = O(w_n)$?

3. Dans les deux cas suivants, a-t-on $u_n = o(v_n)$ ou $v_n = o(u_n)$?
   (a) $u_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = n$; (b) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

4. (a) Soient $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que $u_n \sim v_n$.
   (b) Déterminer un équivalent de $w_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)$.

Exercice II.18. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Montrer les équivalents suivants :
1. $\ln(1+u_n) \sim u_n$; 2. $\sin(u_n) \sim u_n$; 3. $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$; 4. $(1+u_n)^\lambda - 1 \sim \lambda u_n$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Exercice II.19. On considère les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ définies pour tout $n \geq 2$ par

$$u_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Qu'en déduire sur la suite (H_n) ?

Exercice II.20. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes et donner leurs limites :

a) $u_n = n^2 + 2n + 3$

b) $u_n = \dfrac{2n^5 - 4n^2 + 3}{3n^2 - 8n + 7}$

c) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

d) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2^n}$

f) $u_n = \dfrac{4^{n+1} + n^3}{2^n + n}$

g) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2}$

h) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$

i) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n} + (\ln n)^9}{n^2 + 1}$

j) $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{n^3 + 2n}$

k) $u_n = \dfrac{n+1}{n! + 5^n}$

l) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

m) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

n) $u_n = \sqrt[3]{n^2 + n + 1}$

o) $u_n = \ln(n+1)$

p) $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$

Exercice II.21. On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^3 - 6n^2 + 3n - 1}{2n^3 - 2n}$ définie pour $n \geq 2$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
2. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.
3. Déterminer des réels α et β tels que $u_n = \ell + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice II.22. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n^2 + k}$.