Colles 12 - 15/12/2025 au 19/12/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 10 : Ensembles, logique et rédaction.
  Exercices traités en classe : I.1 à 6, II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.7, II.8.
- Chapitre 11 : Parties de $\mathbb{R}$.
  Exercices traités en classe : 2, 3, 4.
- Chapitre 12 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
  Exercices traités en classe : 1, 4.
- Chapitre 13 : Applications.
  - ▹ Définitions, prolongement, restriction, composition.
  - ▹ Image directe, image réciproque, opérations.
  - ▹ Injectivité, surjectivité, bijectivité, application réciproque.

  Exercices traités en classe : 1, 3, 4, 5, 8.

Questions de cours

Question 1

- Distributivité de $\cap$ sur $\cup$: $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- Donner la définition de $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0, 1]$.
- C10, Exercice II.2 : Soit $a < b$ deux réels. Montrer que $[a, b] = \{ta + (1-t)b, \text{ avec } t \in [0, 1]\}$.
- C10, Exercice II.6 : Montrer que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$ par contraposée.
- Donner la définition de borne supérieure/inférieure. Énoncer la propriété de la borne supérieure. C11 Exercice 3 : soit $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer, si elles existent, sa borne inférieure et sa borne supérieure.
- C11, Exercice 4 : On prend $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vides et majorées et on pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- Donner la définition de nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- Définition d'image directe. Image directe d'une intersection, contre-exemple pour l'inclusion réciproque.
- Définition d'image réciproque. Image réciproque d'une intersection, d'une union.
- Définition d'application injective (avec les quantificateurs). Montrer que la composée de deux applications injectives est injective, puis que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Définition d'application surjective (avec les quantificateurs). Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective, puis que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▹ Propriétés opératoires de l'intersection et de l'union (distibutivité, éléments neutres, loi de Morgan).
  - ▹ Propriété de la borne supérieure.
  - ▹ Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.
  - ▹ Approximation décimale d'un réel.
  - ▹ Théorème de la division euclidienne.
  - ▹ Principe de l'algorithme d'Euclide.
  - ▹ Décomposition en facteurs premiers.
  - ▹ Images directes et opérations sur les ensembles.
  - ▹ Images réciproques et opérations sur les ensembles.
  - ▹ Monotonie et injectivité.
  - ▹ Composition et injectivité/surjectivité/bijectivité.

A savoir faire

1. Savoir démontrer une inclusion entre deux ensembles.
2. Savoir montrer une égalité entre deux ensembles par double inclusion.
3. Connaître les propriétés de calcul sur les ensembles.
4. Savoir montrer qu'un nombre est irrationnel en raisonnant par l'absurde.
5. Savoir justifier l'existence d'une borne sup/inf.
6. Savoir calculer le PGCD de deux entiers :
   - avec l'algorithme d'Euclide ;
   - en utilisant la décomposition en facteurs premiers.
7. Savoir montrer qu'une application est injective/surjective/bijective :
   - En utilisant les définitions.
   - En utilisant une application réciproque (lorsqu'elle existe)
   - En utilisant le TBM (pour des fonctions réelles).