Applications - Exercices

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E. De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices :

1. $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$
3. $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
4. $1 - \mathbb{1}_A$
5. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
6. $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$

Exercice 2. Soit E un ensemble non vide et A et B deux parties de E. On rappelle que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_{A\cap B}$.
2. Soit $C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 3. Déterminer $f(\mathbb{R}_+), f(\mathbb{R}_-), f(\{-1\}), f^{<-1>}(\mathbb{R}_+), f^{<-1>}(\mathbb{R}_-)$ et $f^{<-1>}(\{-1\})$ pour les fonctions suivantes :
a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \ln x$; c) $f(x) = \cos x$

Exercice 4.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $]-1,1[$.
3. Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ définie par $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 5. On considère l'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x(1-x) \end{array}$$

1. Déterminer $f^{<-1>}(\{y\})$ pour tout réel y.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Trouver deux intervalles I et J, aussi grands que possibles, tels que $f : I \to J$ soit bijective.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f n'est pas injective.
2. Montrer que $f_{|\mathbb{Q}}$ est injective.

Exercice 7. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{si } n \text{ est pair.} \\ \dfrac{n-1}{2} \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$

Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de $f, g, f\circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 8. On définit l'application F de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (x + y, xy)$. F est-elle injective, surjective, bijective ?
Même question avec $G(x, y) = (x, xy - y^3)$ et $H(x, y) = (1, x + y, x - y)$.

Exercice 9. On définit l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

f est-elle injective, surjective, bijective ?
Donner l'image par f du cercle de centre O et de rayon 1. Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 10. On définit les fonctions réelles suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} A_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} A_2 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} A_3 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + x \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} A_4 = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + 2 \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} A_5 = [0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases} \quad f_6 : \begin{cases} A_6 =]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$$

1. Pour tout $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$:
   (a) Tracer la courbe représentative de f_i.
   (b) Dire si f_i est une injection, une surjection, une bijection.
   Dans chacun des cas, si f_i n'est pas bijective, on déterminera des ensembles E_i et F_i tels que $f_{i|E_i}$ est une bijection de E_i sur F_i.
   (c) Déterminer les ensembles $f_i(A_i), f_i(]0,2])$ et $f_i^{<-1>}(]-1,1[)$.

2. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression de chacune des applications suivantes :

$$a)\ f_1 \circ f_2 \qquad b)\ f_2 \circ f_1 \qquad c)\ f_4 \circ f_5 \qquad d)\ f_6 \circ f_5$$

Exercice 11. Soient E un ensemble non vide et $f : E \to E$ une application.

1. On suppose que f est surjective. Montrer que $f \circ f$ est surjective.
2. On suppose que f vérifie : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 12. Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$.

1. Montrer que si f est surjective et $g \circ f$ est injective, alors g est injective.
2. Montrer que si g est injective et $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 13. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :

1. f est injective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E), f^{<-1>}(f(A)) = A$.
   Que peut-on dire si f n'est pas injective ?
2. f est surjective $\iff \forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{<-1>}(B)) = B$.
   Que peut-on dire si f n'est pas surjective ?

Exercice 14. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 15. Soit E un ensemble non vide. On note $Bij(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E.

1. Montrer que si f et g sont dans $Bij(E)$, alors $f \circ g \in Bij(E)$.
   On dit que $\circ : Bij(E) \times Bij(E) \to Bij(E)$ est une **loi interne**.
2. Montrer que : $\forall f, g, h \in Bij(E), (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
   On dit que la loi interne $\circ$ est **associative**.
3. Justifier que l'application $\mathrm{id}_E : x \in E \mapsto x \in E$ est dans $Bij(E)$, et montrer que : $\forall f \in Bij(E), f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E \circ f$.
   On dit que id_E est un **élément neutre** pour la loi $\circ$.
4. Justifier que $\forall f \in Bij(E), \exists g \in Bij(E), f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   On dit que tous les éléments de $Bij(E)$ admettent un inverse pour la loi $\circ$.
   On dit que $(Bij(E), \circ)$ est un **groupe**.
5. On suppose que E a au moins 3 éléments. Trouver deux applications $f, g \in Bij(E)$ telles que $f \circ g \neq g \circ f$.
   On dit alors que $(Bij(E), \circ)$ n'est pas **commutatif**.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ est la fonction indicatrice de $A \cap B$.
2. $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ est la fonction indicatrice de $A \cup B$.
3. $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ est la fonction indicatrice de $A \cap B$.
4. $1 - \mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de $\overline{A}$.
5. $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ est la fonction indicatrice de $A \cup B$.
6. $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$ est la fonction indicatrice de $A \Delta B$.

Exercice 3 :

a) $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$, $f(\mathbb{R}_-) =]0,1]$, $f(\{-1\}) = \{\mathrm{e}^{-1}\}$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}_-) = \emptyset$, $f^{<-1>}(\{-1\}) = \emptyset$.

b) $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}_-) = \emptyset$, $f(\{-1\}) = \emptyset$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}_-) =]0,1]$, $f^{<-1>}(\{-1\}) = \{\mathrm{e}^{-1}\}$.

c) $f(\mathbb{R}_+) = [-1,1]$, $f(\mathbb{R}_-) = [-1,1]$, $f(\{-1\}) = \{\cos(-1)\}$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}^+) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi]$, $f^{<-1>}(\mathbb{R}_-) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi]$, $f^{<-1>}(\{-1\}) = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4 :

1. $f(0) = f(1)$, donc f n'est pas injective (donc pas bijective). Si $y \in [-1,1]$, alors $f(\arcsin(y)/\pi) = \sin(\arcsin(y)) = y$, donc f est surjective.
2. La dérivée de f est $\pi\cos(\pi x)$ qui est strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, donc f est strictement monotone sur cet intervalle, et donc c'est une bijection sur son ensemble image $]-1,1[$.
3. Soit $y \in]-1,1[$, $y = \dfrac{x}{1+|x|} \iff y(1+|x|) = x \iff y = x - |x|y$. Si $y > 0$, alors $x > 0$ et $x = \dfrac{y}{1-y}$, et si $y < 0$, alors $x < 0$ et $x = \dfrac{y}{1+y}$. On vérifie que pour $y = 0$, on a bien une seule solution $x = 0$. Donc $h^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.

Exercice 5 :

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résoud $x(1-x) = y \iff x^2 - x + y = 0$. On trouve $\Delta = 1 - 4y$. On a donc $f^{<-1>}(\{y\}) = \emptyset$ si $y > frac14$, $f^{<-1>}(\{1/4\}) = \{1/2\}$ et $f^{<-1>}(\{y\}) = \left\{\dfrac{1-\sqrt{1-4y}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{1-4y}}{2}\right\}$ si $y < \dfrac{1}{4}$.
2. f n'est pas injective, car certaines valeurs de y ont deux antécédents, et n'est pas surjective car certaines valeurs de y n'ont pas d'antécédents.
3. On prend $J =]-\infty, 1/4]$, car toutes les autres valeurs n'ont pas d'antécédents par f. Ensuite, on remarque que parmi les deux antécédents trouvés pour $y < \dfrac{1}{4}$, l'un est plus grand que $\dfrac{1}{2}$, l'autre est plus petit. Donc on prend $I = [1/2, +\infty[$.

Exercice 6 :

1. $f(\sqrt{2}) = 2$ et $f(-1) = 2$, donc f n'est pas injective.
2. Soient $r, r' \in \mathbb{Q}$ tels que $f(r) = f(r')$. Si r et r' sont positifs, alors $r^2 = r'^2$ donc $r = r'$. De même si r et r' sont négatifs. Si $r \geq 0$ et $r' < 0$. Alors $r^2 = 2r'^2$, donc $\dfrac{r}{r'} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui n'est pas possible.

Exercice 7 : Si n est pair : $f \circ g(n) = f(n/2) = n$. Si n est impair : $f \circ g(n) = f((n-1)/2) = n-1$.
$g \circ f(n) = g(2n) = n$.
Injectives : f, $g \circ f$; surjectives : g, $g \circ f$.

Exercice 8 : F n'est pas injective ($F(x,y) = F(y,x)$) et pas surjective (faire le lien avec la somme et le produit des racines d'un polynome du second degré).
Pour la seconde, elle n'est pas injective ($(1,1)$ et $(1,-1)$), mais surjective : on prend $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et on cherche un antécédent. On trouve $x = u$, puis y vérifie $uy - y^3 = v$ et on fait une étude de fonction.
Pour la troisième, elle n'est pas surjective, car $(0,0,0)$ n'a pas d'antécédent. Elle est injective.

Exercice 9 : f est surjective mais n'est pas injective : si $a^2 \neq 4$, alors l'équation $f(z) = a$ a deux solutions.
$f(C(O,1)) = [-2,2]$: en effet, $z \in C(O,1) \iff z = \mathrm{e}^{i\theta}$, et $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$. $f^{<-1>}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R}^*$: en effet, $f(z) = i\lambda \iff z^2 - i\lambda z + 1 = 0$, donc le discriminant est $-\lambda^2 - 4 = (i\sqrt{\lambda^2+4})^2$.

Exercice 10 :

1. (a) A faire...
   (b) Injections : f_1, f_4, f_5 et f_6. Surjections : f_4, f_6.
   Bijections : $f_1 : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f_2 : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $f_3 : [-1/2, +\infty[\to [-1/4, +\infty[$, $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f_6 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

(c) $f_1(A_1)=\mathbb{R}^*$, $f_1(]0,2])=[1/2,+\infty[$, $f_1^{<-1>}(]-1,1[)=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
$f_2(A_2)=[-1,1]$, $f_2(]0,2])=]0,1]$, $f_2^{<-1>}(]-1,1[)=\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
$f_3(A_3)=[-1/4,+\infty[$, $f_3(]0,2])=]0,6]$, $f_3^{<-1>}(]-1,1[)=]-(1+\sqrt{5})/2,(\sqrt{5}-1)/2[$.
$f_4(A_4)=\mathbb{R}$, $f_4(]0,2])=]2,5]$, $f_4^{<-1>}(]-1,1[)=]-1,-1/3[$.
$f_5(A_5)=\mathbb{R}^+$, $f_5(]0,2])=]0,\sqrt{2}]$, $f_5^{<-1>}(]-1,1[)=[0,1[$.
$f_6(A_6)=\mathbb{R}$, $f_6(]0,2])=]-\infty,\ln 2]$, $f_6^{<-1>}(]-1,1[)=]\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}[$.

2. $f_1\circ f_2(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
$f_2\circ f_1(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
$f_4\circ f_5(x)=3\sqrt{x}+2$ sur $\mathbb{R}^+$.
$f_6\circ f_5(x)=\ln\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 :

1. Soit $y\in E$. Comme f est surjective, il existe $x\in E$ tel que $f(x)=y$. Comme f est surjective, il existe $z\in E$ tel que $f(z)=x$. Ainsi, $y=f\circ f(z)$, donc $f\circ f$ est surjective.
2. Supposons que f est surjective. Prenons $x,x'\in E$ tels que $f(x)=f(x')$. Il existe $y,y'\in E$ tels que $x=f(y)$ et $x'=f(y')$. Donc $f(f(y))=f(f(y'))$. En composant par f et en utilisant $f\circ f\circ f=f$, on trouve $f(y)=f(y')$, donc $x=x'$. Ainsi, f est injective.
Supposons que f est injective. Soit $y\in E$. Par hypothèse, $f(f(f(y)))=f(y)$. Par injectivité, $y=f(f(y))$, donc $f(y)$ est un antécédent de y. Ainsi, f est surjective.

Exercice 12 :

1. Supposons que f est surjective et $g\circ f$ est injective. Prenons $x,x'\in F$ tels que $g(x)=g(x')$. Comme f est surjective, il existe $y,y'\in E$ tels que $x=f(y)$ et $x'=f(y')$. Donc $g(f(y))=g(f(y'))$. Comme $g\circ f$ est injective, $y=y'$. Donc $x=x'$ et g est injective.
2. Supposons que g est injective et $g\circ f$ est surjective. Prenons $y\in F$. Comme $g\circ f$ est surjective, il existe $x\in E$ tel que $g\circ f(x)=g(y)$. Comme g est injective, $f(x)=y$. Donc f est surjective.

Exercice 13 :

1. Soit $A\in\mathscr{P}(E)$. On a toujours $A\subset f^{<-1>}(f(A))$: si $x\in A$, alors $f(x)\in f(A)$, donc $x\in f^{<-1>}(f(A))$. Si f est injective on a égalité : si $x\in f^{<-1>}(f(A))$, il existe $y\in f(A)$ tel que $f(x)=y$. Or, $y=f(z)$ pour $z\in A$. Donc $f(x)=f(z)$ et $x=z$ par injectivité. Donc $x\in A$. Réciproquement, si pour tout $A\in\mathscr{P}(E)$ on a $f^{<-1>}(f(A))=A$, alors f est injective : si $x,x'\in E$ avec $f(x)=f(x')$, alors en prenant $A=\{x\}$, $x'\in f^{<-1>}(f(A))=A$, donc $x=x'$.
2. Soit $B\in\mathscr{P}(F)$. On a toujours $f(f^{<-1>}(B))\subset B$: si $y\in f(f^{<-1>}(B))$, alors $y=f(x)$ pour un certain $x\in f^{<-1>}(B)$. Par définition, $f(x)\in B$, donc $y\in B$. Si f est surjective, on a égalité : si $y\in B$, alors par surjectivité, il existe $x\in E$ tel que $f(x)=y$. Donc $x\in f^{<-1>}(B)$, et $y\in f(f^{<-1>}(B))$. Réciproquement, si pour tout $B\in\mathscr{P}(F)$, on a $B=f(f^{<-1>}(B))$, alors f est surjective : si on prend $B=F$, alors $F=f(f^{<-1>}(F))$, donc f est surjective.

Exercice 14 : Supposons que f est injective. Prenons $A,B\in\mathscr{P}(E)$.

- Soit $y\in f(A\cap B)$. Il existe $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$. Comme $x\in A$, alors $y\in f(A)$, et comme $x\in B$ on a $y\in f(B)$. Donc $y\in f(A)\cap f(B)$ et $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. (on n'a pas utilisé l'injectivité, cette inclusion est toujours vraie !)
- Soit $y\in f(A)\cap f(B)$. Alors $y\in f(A)$, donc il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$ et $y\in f(B)$, donc il existe $x'\in B$ tel que $y=f(x')$. Par injectivité, $x=x'\in A\cap B$. Donc $y\in f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $A,B\in\mathscr{P}(E)$, $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$. Prenons $x,x'\in E$ tels que $f(x)=f(x')$. Alors en posant $A=\{x\}$ et $B=\{x'\}$, on obtient $f(A)\cap f(B)=\{f(x)\}=f(A\cap B)$. En particulier, $f(A\cap B)$ n'est pas vide, donc $A\cap B$ n'est pas vide : $x=x'$ et f est injective.
Si on prend $f:x\in\mathbb{R}\to x^2\in\mathbb{R}$ et $A=[-2,-1]$ et $B=[1,2]$, alors $A\cap B=\emptyset$ donc $f(A\cap B)=\emptyset$. Mais $f(A)=f(B)=[1,4]$, donc $f(A)\cap f(B)=[1,4]$.
On n'a en fait que l'inclusion $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

Exercice 15 :

1. On vérifie que $f\circ g$ est injective puis qu'elle est surjective.
2. Immédiat.
3. id_E est bien injective et surjective.
4. C'est la bijectiion réciproque.
5. On prend a,b et c trois éléments distincts, et on défini $f(a)=b$, $f(b)=a$, et sinon $f(x)=x$, puis $g(b)=c$ et $g(c)=b$, sinon $g(x)=x$. Alors $f\circ g(a)=b$ et $g\circ f(a)=c$.