Chapitre 14 : Suites numériques

I. Suites numériques : généralités

I.1. Définitions

Définition I.1. Une **suite numérique** est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le réel $u(n)$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite u. On appelle u_n le **terme général de** u.

Remarque I.1.
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle de suite réelle.
- Certaines suites ne sont définies qu'à partir d'un certain entier n_0. On les note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

On peut définir une suite de plusieurs façons différentes :
- de **façon explicite** en donnant une expression de son terme général : $u_n = f(n)$;
- de **façon implicite** en donnant une équation dépendant de n et dont la solution est u_n ;
- par **récurrence** en donnant son (ou ses) premier terme et une relation de récurrence : $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

I.2. Variations

Définition I.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
- **majorée** si l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, c'est-à-dire si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
  On dit alors que M est un **majorant** de (u_n), que M **majore** (u_n) ou encore que (u_n) est **majorée** par M.
  On a une définition analogue pour les suites minorées.
- **bornée** si (u_n) est à la fois minorée et majorée.
- **croissante** (resp. **strictement croissante**) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
- **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
- **monotone** (resp. **strictement monotone**) si elle est soit croissante soit décroissante (resp. soit strictement croissante soit strictement décroissante).

Méthode. Pour montrer qu'une suite est monotone, on a essentiellement deux méthodes principales et deux particulières :
- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. En effet, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ (resp. ≤ 1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite est croissante (resp. décroissante).
- Lorsque $u_n = f(n)$, le sens de variation de (u_n) est le même que celui de f.

Proposition I.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée, c'est-à-dire ssi :* $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Définition I.3. Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\exists C \in \mathbb{K}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = C.$$

I.3. Opérations

Définition I.4. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- On note λu la suite de terme général λu_n.
- On note $u + v$ la suite de terme général $u_n + v_n$.
- On note uv la suite de terme général $u_n v_n$.

Proposition I.2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Si u et v sont bornées, alors λu, $u+v$, uv aussi.

II. Exemples

II.1. Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Définition II.1.
- Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison r** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- Soit $q \in \mathbb{K}$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison q** lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

Méthode. Pour tester si une suite est arithmétique ou non :
- on calcule $u_1 - u_0$ et $u_2 - u_1$;
- si les deux valeurs sont différentes la suite n'est pas arithmétique ;
- sinon, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour n'importe quel n.

Pour les suites géométriques, on fait de même en remplaçant les soustractions par des divisions.

Proposition II.1.
1. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ et de premier terme u_0. Alors :*
   - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
   - $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} u_k = \frac{u_p + u_m}{2}(m-p+1)$.
2. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors :*
   - $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.
   - *Si* $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q}$.

Définition II.2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe a et b dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Méthode. Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour une suite arithmético-géométrique lorsque $a \neq 1$ et $b \neq 0$:
- on cherche une suite constante vérifiant la relation de récurrence : on résoud l'équation $\ell = a\ell + b$;
- On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \ell = a\ell + b \end{cases}$ et en soustrayant, on obtient $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$: la suite $v_n = u_n - \ell$ est donc géométrique de raison a.
- On exprime le terme général de v_n, puis celui de $u_n = v_n + \ell$.

II.2. Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

Définition II.3. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** s'il existe a et $b \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On appelle alors **équation caractéristique** associée l'équation $x^2 - ax - b = 0$.

Proposition II.2. *Soit $r \in \mathbb{C}$. La suite $(u_n) = (r^n)$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ssi r est solution de l'équation caractéristique.*
Si de plus, l'équation caractéristique admet une racine double, alors la suite $(v_n) = (nr^n)$ vérifie aussi la relation de récurrence.

Théorème II.3

Soit (u_n) *une suite complexe récurrente linéaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

- *Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes* r_1 *et* r_2*, alors il existe un unique couple* $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
- *Si l'équation caractéristique a une seule solution* r*, alors il existe un unique couple* $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n.$$

Théorème II.4

Soit (u_n) *une suite réelle récurrente linéaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

- *Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, alors il existe un unique couple* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
- *Si l'équation caractéristique a une seule solution* r*, alors il existe un unique couple* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n.$$
- *Si l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées* $\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ *et* $\rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$*, alors il existe un unique couple* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ *tel que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

II.3. Suites récurrentes d'ordre 1

Proposition II.5. *Soit* f *une fonction définie sur une partie* X *de* $\mathbb{R}$*. On dit que* X *est* ***stable*** *par* f *si* $f(X) \subset X$*.*
Dans ce cas, le système :
$$\begin{cases} u_0 = a \in X \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
définit une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \in X$*.*

On peut représenter graphiquement une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ de la façon suivante :

- on trace le graphe de f et la droite $y = x$;
- on place en abscisse le point $u_0 = a$;
- on trace un segment vertical de u_0 à $\mathscr{C}_f$, puis un segment horizontal jusqu'à la droite $y = x$.
  L'abscisse du point obtenu est u_1 ;
- on repète ces opérations (segment vertical juqu'à $\mathscr{C}_f$ puis horizontal jusqu'à $y = x$) pour déterminer les termes successifs de la suite.

Méthode. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que I est stable par f. On considère une suite (u_n) telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- on étudie le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$;
- si f est croissante, alors (u_n) est monotone, et il suffit de comparer u_0 et u_1 pour décider si (u_n) est croissante ou décroissante.

III. Limite d'une suite

III.1. Convergence

Définition III.1. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit alors que ℓ est la **limite** de (u_n), ou encore que u_n tend vers ℓ, et on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
Si (u_n) ne converge pas, on dit que (u_n) est **divergente**.

Lorsque (u_n) tend vers ℓ, on peut approcher ℓ par les termes de la suite d'aussi près que l'on veut, du moment que l'indice de la suite est assez grand.

Proposition III.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ *2.* $u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *3.* $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Proposition III.2. *Toute suite convergente est bornée.*

Remarque III.1. La réciproque est fausse. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée mais elle ne converge pas.

Il y a deux cas particuliers de suites divergentes : celles qui vont vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Définition III.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) **diverge vers** :

- $+\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$
- $-\infty$ si : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$

Proposition III.3 (Unicité de la limite). *Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) tend vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$. Autrement dit, la limite d'une suite est unique.*

Proposition III.4 (Limites et bornes sup/inf). *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Soit M un majorant de A. Alors $M = \sup(A)$ ssi il existe une suite (u_n) d'éléments de A tels que $u_n \to M$.*
- *Soit m un minorant de A. Alors $m = \inf(A)$ ssi il existe une suite (u_n) d'éléments de A tels que $u_n \to m$.*

III.2. Opérations sur les limites

Lemme III.1. *Soit (u_n) une suite numérique, $\ell \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ un réel indépendant de n. Si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq M\varepsilon$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Théorème III.5

Somme $u_n + v_n$:

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	β	$+\infty$	$-\infty$
α	$\alpha+\beta$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*FI*
$-\infty$	$-\infty$	*FI*	$-\infty$

Produit $u_n v_n$:

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\beta \neq 0$	$\pm\infty$
0	0	*FI*
$\alpha \neq 0$	$\alpha\beta$	$*\infty$
$\pm\infty$	$*\infty$	$*\infty$

Quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$:

$\lim u_n$ \ $\lim v_n$	$\beta \neq 0$	$0^\pm$	$\pm\infty$
$\alpha \neq 0$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$*\infty$	0
0	0	*FI*	0
$\pm\infty$	$*\infty$	$*\infty$	*FI*

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite obtenue en ne prenant que certains termes de (u_n), pris dans le même ordre qu'ils apparaissent dans (u_n). Plus formellement :

Définition III.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Proposition III.6. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers ℓ.*

Méthode. Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, il suffit de trouver deux suites extraites qui n'ont pas la même convergence.
Par exemple, si $u_n = (-1)^n$, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes les deux, mais la première tend vers 1, la seconde vers -1. Donc la contraposée de la proposition III.6 montre que (u_n) n'est pas convergente.

On a la « réciproque » suivante :

Proposition III.7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) tend aussi vers ℓ.*

Théorème III.8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, ℓ un élément ou une borne de I, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{x\to\ell} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L.$$

Remarque III.2. Ce résultat est très utile lorsqu'on étudie une suite vérifiant une relation $u_{n+1} = f(u_n)$: en effet, si on a montré que (u_n) converge vers une limite ℓ inconnue, alors (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$, alors la limite vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.

III.3. Exemples

Exemple III.1. La suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$. En effet, soit $A > 0$, et $N = \lfloor A \rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geq N$, $u_n = n \geq N > A$.
Plus généralement, si $\alpha > 0$, alors $n^\alpha \to +\infty$, et si $\beta < 0$, alors $n^\beta \to 0$.

Proposition III.9. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors :*

- *si $r > 0$, $u_n \to +\infty$;*
- *si $r < 0$, $u_n \to -\infty$;*
- *si $r = 0$, $u_n \to u_0$.*

III.4. Passage à la limite

Proposition III.10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $\ell > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n > 0$$

Théorème III.11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Remarques III.3. Attention :

- il faut d'abord justifier que les deux suites convergent ;
- les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

IV. Théorèmes de convergence

IV.1. Comparaisons

Théorème IV.1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles, et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si, à partir d'un certain rang	*et lorsque $n \to +\infty$*	*alors*
$u_n \leq M_n$	$M_n \to -\infty$	$u_n \to -\infty$
$m_n \leq u_n$	$m_n \to +\infty$	$u_n \to +\infty$
$\lvert u_n - \ell\rvert \leq M_n$	$M_n \to 0$	$u_n \to \ell$
$m_n \leq u_n \leq M_n$	$m_n \to \ell$ et $M_n \to \ell$	$u_n \to \ell$ $(*)$

$(*)$ Ce théorème est appelé théorème des gendarmes.

Proposition IV.2. *Tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.*

IV.2. Théorème des limites monotones

Théorème IV.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

- *Si (u_n) est majorée, alors elle converge.*
- *Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \to +\infty$.*

Corollaire IV.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante.*

- *Si (u_n) est minorée, alors elle converge.*
- *Si (u_n) n'est pas minorée, alors $u_n \to -\infty$.*

Proposition IV.5. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors :*

- *si $q > 1$, $u_n \to +\infty$ si $u_0 > 0$ et $u_n \to -\infty$ si $u_0 < 0$;*
- *si $-1 < q < 1$, $u_n \to 0$;*
- *si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.*

IV.3. Suites adjacentes

Théorème IV.6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

i) (u_n) *est croissante ;*

ii) (v_n) *est décroissante ;*

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et convergent vers la même limite ℓ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.
On dit que (u_n) et (v_n) sont des ***suites adjacentes****.*

V. Suites complexes

Définition V.1. La suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Si (u_n) ne converge pas, on dit que (u_n) est **divergente**.

Proposition V.1. *Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ converge vers $\mathrm{Im}(\ell)$.*

Définition V.2. Soit (u_n) une suite complexe. On dit que (u_n) est bornée si :

$$\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Remarque V.1. Tous les résultats ne faisant pas intervenir d'inégalité ou de monotonie sont encore vrais pour les suites complexes : une suite convergente est bornée, les opérations sur les limites et la version suivante du théorème d'encadrement.

Proposition V.2. *Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \to 0$, alors $u_n \to \ell$.*

Proposition V.3. *Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui converge vers 0. Alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

VI. Comparaison de suites

VI.1. Négligeabilité, domination

Définition VI.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite (u_n) est :

- **négligeable devant** (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et on note $u_n = o(v_n)$;
- **dominée par** (v_n) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et on note $u_n = O(v_n)$.

Remarque VI.1. $u_n = O(1) \iff (u_n)$ est bornée.

Proposition VI.1. *Soit (u_n) une suite numérique et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors* $\lim u_n = \ell \iff u_n = \ell + o(1)$.
En particulier, $u_n = o(1) \iff u_n \to 0$.

Proposition VI.2.
1. *Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.*
2. *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*
3. *Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.*

Proposition VI.3.
1. *Si $u_n = o(w_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.*
2. *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(z_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n z_n)$.*
3. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.*
4. *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.*

Même chose en remplaçant o par O.

Remarque VI.2. On a donc $u_n \times o(1) = o(u_n)$.

Proposition VI.4 (Croissances comparées). *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $q, r \in \mathbb{R}^*$:*

1. *si $\beta > 0$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.*
2. *si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$.*
3. *si $|q| > 1$, $n^\alpha = o(q^n)$*
4. *si $|q| < 1$, $q^n = o(n^\alpha)$.*
5. *si $|q| < |r|$, $q^n = o(r^n)$.*
6. *$q^n = o(n!)$.*
7. *$n! = o(n^n)$.*

VI.2. Équivalence

Définition VI.2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite (u_n) est **équivalente à** (v_n) si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, et on note $u_n \sim v_n$.

Proposition VI.5.
1. *$u_n \sim u_n$ (refléxivité).*
2. *Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$ (symétrie).*
3. *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$ (transitivité).*

Remarque VI.3. On dit que $\sim$ est une **relation d'équivalence** sur l'ensemble des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

Proposition VI.6.
1. *$u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$. On écrira aussi $u_n = v_n + o(v_n)$.*
2. *Si $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim \alpha_n$ et $v_n \sim \beta_n$, alors $\alpha_n = o(\beta_n)$.*

Proposition VI.7. *Soit (u_n) une suite numérique et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors :*

- *si $\ell \neq 0$: $\lim u_n = \ell \iff u_n \sim \ell$;*
- *en général : $\lim u_n = \ell \iff u_n = \ell + o(1)$.*

Proposition VI.8.
1. *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim z_n$, alors $u_n w_n \sim v_n z_n$ et $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{z_n}$.*
2. *Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé, et $u_n \sim v_n$, alors $(u_n)^\lambda \sim (v_n)^\lambda$ (lorsque ces expressions ont un sens).*
4. *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $u_n \sim v_n$, alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.*

Remarque VI.4. Attention : on ne peut pas en général ajouter les équivalents ! Il faut toujours revenir à la définition. On peut par contre ajouter les o.
On ne peut pas non plus composer les équivalents par la gauche !

Proposition VI.9. *Si $v_n = o(u_n)$, alors $u_n + v_n \sim u_n$.*

Proposition VI.10.
1. *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.*
2. *Si (u_n) et (v_n) sont réelles et si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.*

Proposition VI.11. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Alors, si $u_n \sim w_n$, on a $v_n \sim u_n$ et $v_n \sim w_n$.*