Contrôle de cours 9 - Applications - Sujet A
Mercredi 10 décembre 2025

Question 1 (1 pt)

Soit E un ensemble. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Écrire la définition de $A \subset B$ et sa négation.
$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$, $A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B$. □

Question 2 (1 pt)

Soit E un ensemble. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Écrire la définition de $A \subset B$ et sa négation.
$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$, $A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B$. □

Question 3 (5 pts)

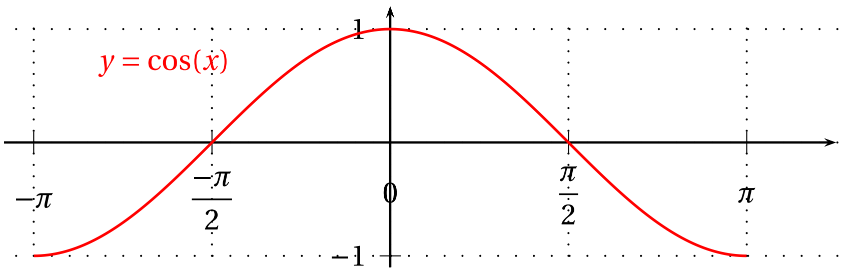
Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, et $B \subset F$.
Donner les définitions de :

1. $f(A) = \left\{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\right\}$.
2. $f^{<-1>}(B) = \left\{x \in E \mid f(x) \in B\right\}$.
3. (avec des quantificateurs) f est injective : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
4. (avec des quantificateurs) f est surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.
5. (avec des quantificateurs) f est bijective : $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid f(x) = y$.
6. Faire un petit dessin pour m'expliquer l'injectivité : □

Question 4 (3pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$.

1. Tracer la courbe de f :



2. En justifiant, dire si l'application f est injective, surjective, bijective.
   f n'est pas injective car $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2)$.
   f n'est pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par cos.
3. Déterminer $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1]$.
4. Déterminer $f^{<-1>}([0, 2]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. □

Question 5 (2 pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x, y+z) \end{array}$. Montrer que f est surjective.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout $f(x, y, z) = (u, v) \iff \begin{cases} 2x = u \\ y + z = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u/2 \\ y = v - z \end{cases}$. On peut prendre $z = 0$ et $(u/2, v, 0)$ est un antécédent de (u, v) par f. Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ admettent au moins un antécédent par f : f est surjective. □

Question 6 (2 pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, y, y-x) \end{array}$. Montrer que f est injective.

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(x,y) = f(x',y')$. Alors $\begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ y = y' \\ y-x = y'-x' \end{cases}$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(x,y) = (x',y')$: f est injective. $\square$

Contrôle de cours 9 - Applications - Sujet B
Mercredi 10 décembre 2025

Question 1 (1 pt)

Soit E un ensemble. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Écrire la définition de $A \subset B$ et sa négation.
$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B$, $A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B$. ☐

Question 2 (1 pt)

Soit E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$. Donner la définition de la fonction indicatrice de A.

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \end{array}.$$ ☐

Question 3 (5 pts)

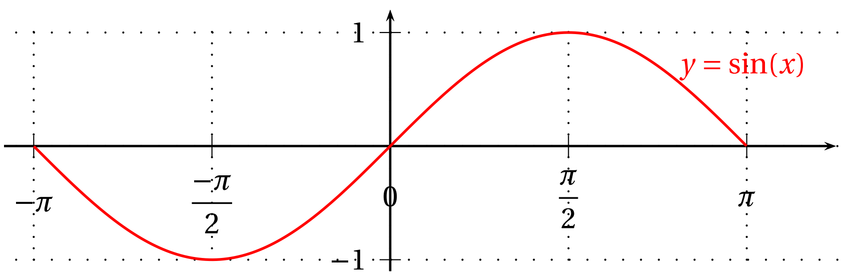
Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, et $B \subset F$.
Donner les définitions de :

1. $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.
2. $f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
3. (avec des quantificateurs) f est injective : $\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
4. (avec des quantificateurs) f est surjective : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.
5. (avec des quantificateurs) f est bijective : $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid f(x) = y$.
6. Faire un petit dessin pour m'expliquer la surjectivité : ☐

Question 4 (3pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.

1. Tracer la courbe de f :



2. En justifiant, dire si l'application f est injective, surjective, bijective.
   f n'est pas injective car $\sin(-\pi) = \sin(0)$.
   f nest pas surjective car 2 n'a pas d'antécédent par sin.
3. Déterminer $f([0, \pi[) = [0, 1]$.
4. Déterminer $f^{<-1>}([-2, 0]) = [-\pi, 0]$. ☐

Question 5 (2 pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, 3y) \end{array}$. Montrer que f est surjective.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout $f(x, y, z) = (u, v) \iff \begin{cases} x + z = u \\ 3y = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u - z \\ y = v/3 \end{cases}$. On peut prendre $z = 0$ et $(u, v/3, 0)$ est un antécédent de (u, v) par f. Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ admettent au moins un antécédent par f : f est surjective. $\square$

Question 6 (2 pts)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x, 2y + x) \end{array}$. Montrer que f est injective.

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(x, y) = f(x', y')$. Alors $\begin{cases} x - y = x' - y' \\ x = x' \\ 2y + x = 2y' + x' \end{cases}$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(x, y) = (x', y')$: f est injective. $\square$