Calcul matriciel - Exercices

Exercice 1. On considère des matrices $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, $E \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ et $F \in \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{K})$. Quels sommes/produits de deux de ces matrices peut-on faire? Indiquer les dimensions de la matrice résultat.

Exercice 2. Calculer le produit des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n, avec :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_3 + B$. Calculer B^n puis en déduire A^n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la question 2, calculer A^n avec :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace** de A la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$.
2. Montrer que la trace est linéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\,\mathrm{tr}(A) + \mu\,\mathrm{tr}(B)$.
3. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0 \iff A = 0_{n,n}$.
5. Trouver toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 5.
1. Montrer que deux matrices symétriques commutent si et seulement si leur produit est symétrique.
2. Montrer que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 6. Soient $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts. Déterminer les matrices qui commutent avec $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Exercice 7.
1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Déterminer les coefficients $[E_{k,l}M]_{ij}$ et $[ME_{k,l}]_{ij}$.
2. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.

Exercice 8. Résoudre les systèmes linéaires :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-t & = & 1 \\ x-y-z+t & = & 2 \\ x-y-z-t & = & 3 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3+3x_4 & = & 0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5 & = & 0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_5 & = & 0 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-4t & = & 4 \\ y-z+t & = & -3 \\ x+3y-3t & = & -3 \\ x+2y+z-4t & = & 4 \end{array}\right.$.

Exercice 9.
1. Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les deux coefficients diagonaux sont égaux. Montrer que toutes les matrices de E commutent.
2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 19 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11. Dans chaque cas, dire si A est inversible, puis calculer son inverse le cas échéant :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \begin{pmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 8 & 5 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(6, 6, -5)$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quelle est son inverse ?

Exercice 13. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = 0_{n,n}$.

1. Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais que $A + B$ et AB ne le sont pas.
2. Montrer que si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible.
   On pourra raisonner par l'absurde.
3. Calculer $(I_n - A) \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} A^k$ et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 14.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et en déduire que A est inversible. Déterminer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 puis exprimer B^3 comme une combinaison linéaire de B^2 et B. En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 15. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $M(t)$ est-elle inversible ?
2. Déterminer deux réels $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ tels que $M(t)^2 = \alpha(t)M(t) + \beta(t)I_3$.
3. Retrouver le résultat de la question 1.
4. On prend $t = -1$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(-1)^n = a_n M(-1) + b_n I_3$.
5. Montrer que (a_n) est une suite récurrente d'ordre 2 puis déterminer son expression.
6. En déduire une expression de $M(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

1. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(PAP^{-1}\right)^n = PA^nP^{-1}.$$
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -11 \\ 0 & -13 & -20 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer PAP^{-1}.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Exprimer M en fonction de J et de I_n.
2. Calculer J^2, puis en déduire M^2 en fonction de M et de I_n.
3. Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle inversible ? Donner alors M^{-1} en fonction de M et I_n.