Colles 14 - 12/01/2026 au 16/01/2026

Thèmes traités en classe

- Chapitre 14 : Suites numériques.
  - ▷ Variations, bornétude, opérations.
  - ▷ Exemples : suites arithmético-géométriques, suites d'ordre 2.
  - ▷ Étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
  - ▷ Limite d'une suite, unicité de la limite, toute suite convergente est bornée.
  - ▷ Opérations sur les limites.
  - ▷ Suites extraites et limites.
  - ▷ Limites et inégalités.
  - ▷ Théorème d'encadrement.
  - ▷ Théorème de la limite monotone.
  - ▷ Théorème des suites adjacentes.
  - ▷ Comparaison de suites : domination, négligeabilité, équivalence.

  Exercices traités en classe : I.1, I.2 I.3, I.4, I.5, I.8, I.9, I.10, I.13, II.2, II.3, II.4, II.5, II.6, II.7, II.8, II.9, II.10, II.15, II.17, II.18, II.19, II.20.

Questions de cours

Question 1

- Une suite réelle (u_n) est bornée ssi la suite $(|u_n|)$ est majorée.
- La somme et le produit de deux suites bornées sont bornés.
- C14 exercice I.3 : Montrer que la somme de deux suites stationnaires est stationnaire. Que dire de la somme de deux suites croissantes ?
- Toute suite convergente est bornée : énoncé et démonstration.
- Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell > 0$. Alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ, alors (u_n) tend aussi vers ℓ. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Énoncer le théorème d'encadrement. Démontrer le cas où la suite est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant.
- C14 Exercice II.10 : Montrer que la suite (H_n) définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $H_n \to +\infty$.
- C14 Exercice II.15 : On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (L_{2n}) et (L_{2n+1}) sont adjacentes, puis en déduire la nature de la suite (L_n).
- Sur demande, pour les plus motivés : C14 Exercice II.5 : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell$.
- Définition de domination, négligeabilité, équivalence. Montrer que $n! = o(n^n)$.
- C14 Exercice II.19 : Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $v_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Bornitude et opérations.

- ⊳ Propriétés des suites arithmétiques/géométriques.
- ⊳ Théorèmes qui donnent l'expression d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.
- ⊳ Convergence et bornitude.
- ⊳ Unicité de la limite.
- ⊳ Limites et bornes sup/inf.
- ⊳ Limites et inégalités.
- ⊳ Théorème de comparaison.
- ⊳ Théorème de limite monotone.
- ⊳ Théorème des suites adjacentes.
- ⊳ Croissances comparées avec des o.

A savoir faire

1. Étudier la monotonie d'une suite.
2. Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique et d'une suite récurrente d'ordre 2.
3. Savoir utiliser l'étude des fonctions f et $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie de $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Connaître les définitions de $u_n \to \ell$ et $u_n \to \pm\infty$.
5. Savoir appliquer proprement les théorèmes d'encadrement et de la limite monotone.
6. Savoir encadrer une somme en utilisant le plus petit terme et le plus grand terme.
7. Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.
8. Savoir trouver un équivalent simple d'une suite et en déduire une limite.