Suites numériques - Exercices

I. Généralités

Exercice I.1. Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
2. $v_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
4. $z_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice I.2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $u_n = \cos\left(\frac{2\pi n!}{p!}\right)$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice I.3.

1. Montrer que la somme de deux suites stationnaires est stationnaire.
2. Que dire de la somme de deux suites croissantes ?

Exercice I.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,4]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{|u_n|}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \sqrt{x}$.
2. Déterminer les points fixes de f et en déduire deux intervalles stables par f.
3. Justifier que (u_n) est bien définie et bornée.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice I.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On pose $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Étudier rapidement la fonction f.
2. Déterminer les points fixes de f et en déduire deux intervalles stables par f.
3. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
4. Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice I.6. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques, géométriques ou ni l'un ni l'autre ?

1. $u_n = n^2 - 3n + 2$
2. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 4$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$
4. $u_n = \frac{3n+1}{2}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}$
6. $u_n = (-1)^n \times 2^{3n+1}$

Exercice I.7. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.
On considère la suite (z_n) de terme général $z_n = u_n + i v_n$. Déterminer le terme général de la suite (z_n) en fonction de n, puis en déduire les expressions de u_n et v_n.

Exercice I.8. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{2w_n + 3}{w_n + 4}$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{x+4}$ et déterminer $f([0,1[)$.
2. Montrer que la suite (w_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [0,1[$.
3. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_n = \frac{w_n - 1}{w_n + 3}$.
   Montrer que (z_n) est géométrique.
5. En déduire le terme général de (w_n).

Exercice I.9. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Exercice I.10. Dans chaque cas, déterminer le terme général de la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$

Exercice I.11. Soient α et β deux réels strictement positifs. On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 > 0$ et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \alpha u_n^{\beta}$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

Exercice I.12 (E3A 2021 PC). 1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\dfrac{1}{\gamma}$.

2. Soient (a_n) et (b_n) définier par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et les relations : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
   (a) Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
   (b) Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?
   i. $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$ ii. $\dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$ iii. $\dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{N}$.
   (d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n.
   (e) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

Exercice I.13. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2^n \end{cases}$.

1. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = c2^n$, où c est une constante réelle. Justifier qu'il existe une unique valeur de c telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$.
2. Les suites (a_n) et (u_n) sont-elles égales ?
3. Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice I.14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}$.
2. On suppose que (u_n) est strictement positive. Montrer que (u_n) est géométrique si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n+2}}$.

II. Convergence

Exercice II.1. Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{5n^2 + 3n - 1}{(2n+1)(n+2)}$
b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{4^n - 1}$
c) $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{1 - n^2}$
d) $u_n = \dfrac{n^2 + 2}{e^n - n}$
e) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
f) $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$
g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
h) $u_n = \sqrt[n]{n}$
i) $u_n = \sqrt{n^4 + n^2 - 2} - n^2 - n$

Exercice II.2. Étudier les suites de terme général (convergence ou divergence, et limite éventuelle) :

a) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{1 + n!}$
b) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
c) $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n}$
d) $u_n = \dfrac{3n^2 + \cos n}{4(n+1)^2 + \sin 3n}$
e) $u_n = n(2 + \cos n)$
f) $u_n = \dfrac{2n + \sin\left(3\exp\left(\frac{n!}{(\ln n)^n}\right)\right)}{n^2}$
g) $u_n = \dfrac{\lfloor (3n - \frac{1}{2})^2 \rfloor}{\lfloor (4n + \frac{1}{2})^2 \rfloor}$
h) $u_n = \dfrac{2 + n(-1)^n}{n} + (-1)^n$
i) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{1 + \sqrt{n}}$
j) $u_n = \dfrac{(-1)^n n + \cos n}{n+1}$
k) $u_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$
l) $u_n = \dfrac{1}{n^6} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$
m) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$
n) $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos\left(\dfrac{n\pi}{8}\right)$
o) $u_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice II.3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit M un majorant de A.

1. On suppose que $M = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $u_n \to M$.
2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A telle que $u_n \to M$. Montrer que $M = \sup(A)$.
3. Déterminer $\sup([0,1[)$.

Exercice II.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice II.5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes qui converge vers une limite finie ℓ. On pose pour tout $n>0$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers ℓ.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs complexes telle que $u_{n+1}-u_n \to \ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \to \ell$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que si $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.
4. Déterminer les limites de : $\dbinom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}$ et $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice II.6. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et tracer sa représentation graphique lorsque $u_0 = 5$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution de cette équation dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Déterminer $f([0,\alpha])$ et $f([\alpha,+\infty[)$.
4. On prend $u_0 \in [0,\alpha]$. Étudier la convergence de (u_n).
5. Même question avec $u_0 \in [\alpha,+\infty[$.
6. En suivant le même schéma, étudier la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [1,+\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2+7u_n}{2}} - 1 \end{cases}$. Que dire si $u_0 \in]0,1[$?

Exercice II.7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Soit $f : x \mapsto x - x^2$. Dresser le tableau de variations de f.
2. On suppose que $u_0 \in [0,1]$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. On suppose maintenant que $u_0 < 0$. Montrer que (u_n) tend vers $-\infty$.
4. Étudier le cas où $u_0 > 1$.

Exercice II.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice II.9.

1. Montrer que pour tout entier $k > 1$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ converge.

Exercice II.10. On définit la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite (H_n).

Exercice II.11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})^n\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice II.12.

1. Étudier la convergence de la suite $u_n = \cos(n\pi)$.
2. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On pose $c_n = \cos(n\theta)$ et $s_n = \sin(n\theta)$.
   (a) Exprimer c_{n+1} et s_{n+1} en fonction de c_n et s_n.
   (b) En déduire que (c_n) et (s_n) divergent.

Exercice II.13. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice II.14. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit $k\in]0,1[$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|u_{n+1}|\leq k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que :
   (a) si $\ell<1$, alors $u_n\to 0$;
   (b) si $\ell>1$, alors $u_n\to+\infty$.

Exercice II.15. On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $L_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$.
Montrer que les suites $(L_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(L_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire la nature de la suite (L_n).

Exercice II.16. On considère les suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ définies par :

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad\text{et}\quad v_n=u_n+\frac{1}{n\cdot n!}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est irrationnelle.

Exercice II.17. 1. Soient $a_n=n^2, b_n=(-1)^n(n^2-2n+1), c_n=\ln(n)$ et $d_n=n^2-\dfrac{5}{2}n+\sqrt{3}$. Vérifier que $b_n=O(a_n), c_n=o(a_n)$ et $d_n\sim a_n$.

2. Soient $(u_n),(v_n)$ et (w_n) trois suites de termes généraux :

$$u_n=n^3\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad v_n=2n,\qquad w_n=\mathrm{e}^{-n}$$

   Montrer que $w_n=o(v_n)$. A-t-on $u_n=O(w_n)$?

3. Dans les deux cas suivants, a-t-on $u_n=o(v_n)$ ou $v_n=o(u_n)$?
   (a) $u_n=n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_n=n$; (b) $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n=\dfrac{1}{n^2}$.

4. (a) Soient $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $v_n=\dfrac{1}{n^2}$. Montrer que $u_n\sim v_n$.
   (b) Déterminer un équivalent de $w_n=\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$.

Exercice II.18. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Montrer les équivalents suivants :
1. $\ln(1+u_n)\sim u_n$; 2. $\sin(u_n)\sim u_n$; 3. $\mathrm{e}^{u_n}-1\sim u_n$; 4. $(1+u_n)^\lambda-1\sim\lambda u_n$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

Exercice II.19. On considère les suites $(u_n)_{n\geq2}$ et $(v_n)_{n\geq2}$ définies pour tout $n\geq2$ par

$$u_n=-\ln n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\quad\text{et}\quad v_n=-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. On pose $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Qu'en déduire sur la suite (H_n) ?

Exercice II.20. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes et donner leurs limites :

a) $u_n=n^2+2n+3$
b) $u_n=\dfrac{2n^5-4n^2+3}{3n^2-8n+7}$
c) $u_n=\dfrac{1}{n+1}$
d) $u_n=\dfrac{n}{n+1}$
e) $u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2^n}$
f) $u_n=\dfrac{4^{n+1}+n^3}{2^n+n}$
g) $u_n=\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{2}$
h) $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k$
i) $u_n=\dfrac{n+\sqrt{n}+(\ln n)^9}{n^2+1}$
j) $u_n=\dfrac{n^3+2^n}{n^3+2n}$
k) $u_n=\dfrac{n+1}{n!+5^n}$
l) $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$
m) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
n) $u_n=\sqrt[3]{n^2+n+1}$
o) $u_n=\ln(n+1)$
p) $u_n=\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

Exercice II.21. On considère la suite de terme général $u_n=\dfrac{n^3-6n^2+3n-1}{2n^3-2n}$ définie pour $n\geq2$.

1. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
2. Déterminer un équivalent de $u_n-\ell$.
3. Déterminer des réels α et β tels que $u_n=\ell+\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\beta}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice II.22. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général : $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n^2+k}$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\leq\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n(n+1)}\leq 0$, donc (u_n) décroissante.
2. La suite (v_n) est strictement positive et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{2(n+1)-1}{2(n+1)}<1$, donc (v_n) est décroissante.
3. $w_{n+1}-w_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2(n+1)}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2(n+1)}\geq 0$, donc (w_n) est croissante.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. La suite (z_n) est strictement positive et $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{n+1}\right)\geq 1$, donc (z_n) est croissante.

Exercice I.2 : Pour tout $n>p$, $\dfrac{n!}{p!}=n(n-1)\cdots(n-p)\in\mathbb{N}$, donc $u_n=1$ car cos est 2π périodique.

Exercice I.3 :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites stationnaires. Il existe N_u et N_v deux entiers et C_u, C_v dans $\mathbb{K}$ tels que : $\forall n\geq N_u, u_n=C_u$ et $\forall n\geq N_v, v_n=C_v$.
   Ainsi, $\forall n\geq\max(N_u,N_v), u_n+v_n=C_u+C_v$: la suite $u+v$ est stationnaire.
2. La somme de deux suites croissantes est croissantes : soient (u_n) et v_n deux suites croissantes. Alors : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\geq u_n$ et $v_{n+1}\geq v_n$, donc $u_{n+1}+v_{n+1}\geq u_n+v_n$.

Exercice I.4 :

1. On procède par récurrence (attention à la rédaction). Initialisation : $u_1=\dfrac{u_0}{2}+\sqrt{|u_0|}=-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\geq 0$. Hérédité : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\sqrt{|u_n|}$, et comme u_n et $\sqrt{|u_n|}$ sont positifs, u_{n+1} aussi.
   On procède encore par récurrence. On vérifie que $u_1\leq 4$. Puis, pour l'héridité, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\sqrt{u_n}\leq\dfrac{4}{2}+\sqrt{4}=4$.
2. $\dfrac{x^2}{4}\leq x\iff x^2-4x\leq 0$. On dresse le tableau de signes de x^2-4x.
3. $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{u_n}{2}+\sqrt{|u_n|}$. Or pour tout $x\in[0,4]$, $\dfrac{x}{2}\leq\sqrt{x}$ car $\dfrac{x^2}{4}\leq x$. Donc, pour tout $n\geq 1$, $u_{n+1}-u_n\geq 0$. De plus, $u_1-u_0\geq 0$. Ainsi, la suite est croissante.

Exercice I.5 :

1. La fonction f est croissante de $[-1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$.
2. Comme l'intervalle $[0,+\infty[$ est stable par f et $u_0\in[0,+\infty[$, la suite est bien définie.
3. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leq u_n$. Initialisation : $u_1=\sqrt{2}\geq 1=u_0$. Hérédité : par HR, $u_{n+1}\geq u_n$ et comme f est croissante, $f(u_{n+1})\geq f(u_n)$ d'où $u_{n+2}\geq u_{n+1}$.
4. On montre par récurrence que $u_n\leq 2$, en remarquant que $f(2)=\sqrt{3}\leq 2$.

Exercice I.6 :

1. $u_n=n^2-3n+2$. On calcule les premiers termes pour voir que non.
2. $\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+3\end{cases}$ et $v_n=u_n-4$. La première n'est rien, mais la deuxième est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
3. $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=2+u_n\end{cases}$. C'est une suite arithmétique.
4. $u_n=\dfrac{3n+1}{2}$. C'est une suite arithmétique.
5. $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{2+3u_n}\end{cases}$. Non.
6. $u_n=(-1)^n\times 2^{3n+1}$. C'est une suite géométrique.

Exercice I.7 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}z_n$. Donc $z_n=i\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n=\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}\mathrm{e}^{i\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$. Donc $u_n=-\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ et $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice I.8 :

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$. Sa dérivée vaut $f'(x)=\dfrac{5}{(x+4)^2}\geq 0$, donc f est croissante sur $]-\infty,-4[\cup]-4,+\infty[$. $f([0,1[)=[f(0),f(1)[=\left[\dfrac{3}{4},1\right[$ car f est croissante.
2. On raisonne par récurrence. Initialisation : $w_0=0\in[0,1[$. Hérédité : $w_n\neq -4$ et $w_{n+1}=f(w_n)$ et comme $w_n\in[0,1[$, $f(w_n)\in\left[\dfrac{3}{4},1\right[\subset[0,1[$.

3. Montrons par récurrence que $w_{n+1} - w_n \geq 0$. Initialisation : $w_1 - w_0 = \dfrac{3}{4} \geq 0$. Hérédité : Comme $w_{n+1} \geq w_n$ et que la fonction f est croissante, $f(w_{n+1}) \geq f(w_n)$, donc $w_{n+2} \geq w_{n+1}$.
4. $z_{n+1} = \dfrac{w_{n+1}-1}{w_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{2w_n+3}{w_n+4}-1}{\frac{2w_n+3}{w_n+4}+3} = \dfrac{2w_n+3-w_n-4}{2w_n+3+3w_n+12} = \dfrac{w_n-1}{5w_n+15} = \dfrac{1}{5}\dfrac{w_n-1}{w_{n+1}+3}$, donc (z_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
5. $z_n = z_0\dfrac{1}{5^n} = -\dfrac{1}{3\times 5^n}$. On a de plus : $w_n = \dfrac{3z_n+1}{1-z_n}$.

Exercice I.9 : On applique la méthode du cours : on cherche une suite constante ℓ vérifiant $\ell = 3\ell - 4$. Donc $\ell = 2$. Puis, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$, et on a $v_{n+1} = 3v_n$, donc $v_n = v_0 3^n$. Comme $v_0 = u_0 - 2 = 3$, on a $v_n = 3^{n+1}$, et $u_n = 3^{n+1} + 2$.

Exercice I.10 :

1. Équation caractéristique : $x^2 - 2x - 3 = 0$ dont les racines sont -1 et 3. Donc $u_n = A(-1)^n + B3^n$. On trouve $A = \dfrac{3}{4}$ et $B = \dfrac{1}{4}$ avec les conditions initiales.
2. Équation caractéristique : $x^2 - 6x + 9 = 0$ dont la racine est 3. Donc $u_n = (An+B)3^n$. On trouve $A = -1$ et $B = 1$ avec les conditions initiales.
3. Équation caractéristique : $x^2 - 4x + 5 = 0$ dont les racines sont $2+i$ et $2-i$. Donc $u_n = A(2+i)^n + B(2-i)^n$. On trouve $A = \dfrac{1}{2} + i$ et $B = \dfrac{1}{2} - i$ avec les conditions initiales.

   On peut aussi utiliser les formules pour obtenir l'expression réelle : $2+i = \sqrt{5}\mathrm{e}^{i\arcsin(1/\sqrt{5})}$. Donc $u_n = (A\cos(n\arcsin(1/\sqrt{5})) + B\sin(n\arcsin(1/\sqrt{5})))\sqrt{5}^n$. Pour $n = 0$, $A + B = 1$ et pour $n = 1$, $(A\sqrt{4/5} + B/\sqrt{5})\sqrt{5} = 0 \iff 2A + B = 0$. Donc $A = -1$ et $B = 2$.

Exercice I.11 : On commence par montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Puis, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Alors $v_{n+1} = \beta v_n + \ln(\alpha)$. On a une suite arithmético-géométrique. Si $\beta = 1$, $v_n = v_0 + n\ln(\alpha)$, donc $u_n = u_0\alpha^n$. Sinon, on cherche la suite constante ℓ vérifiant $\ell = \beta\ell + \ln(\alpha)$. On trouve $\ell = \dfrac{\ln(\alpha)}{1-\beta}$. Puis, $w_n = v_n - \ell$ est géométrique de raison β : $w_n = (v_0 - \ell)\beta^n$ et enfin $v_n = \ell + (v_0 - \ell)\beta^n$ et $u_n = \mathrm{e}^{\ell}\,\mathrm{e}^{(\ln(u_0)-\ell)\beta^n} = \alpha^{\frac{1}{1-\beta}}\,\mathrm{e}^{(\ln(u_0)-\ell)\beta^n}$.

Exercice I.12 :

1. Notons α la deuxième racine du trinôme. Alors $\alpha\gamma = -1$ donc $\alpha < 0$ et $\alpha = -\dfrac{1}{\gamma}$. De plus, $\alpha + \gamma = 1$, donc $\gamma = 1 - \alpha > 1$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_{n+1} = a_n + b_n = b_{n-1} + b_n$.
   (b) En prenant $n = 0$, la première expression ne donne pas 0, les deux autres donnent 0. En prenant $n = 1$, les deux dernières expressions donnent 1. Toutefois, on sait que l'expression de b_n doit être de la forme $A\gamma^n + B\dfrac{(-1)^n}{\gamma^n}$, donc la troisième expression est la bonne.
   (c) On le montre par récurrence double : l'initialisation découle de $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Pour l'hérédité : si b_n et b_{n-1} sont des entiers, alors $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$ aussi.
   (d) Pour $n > 0$, $a_n = b_{n-1} = \dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}}$, et on vérifie que cette expression convient encore pour $n = 0$.
   (e) On peut soit procéder par récurrence, ou bien utiliser les expressions trouvées précédemment : soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n + b_n\gamma &= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^n}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n-1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\gamma^{n+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) \\
&= \gamma^n
\end{aligned}$$

Exercice I.13 :

1. Supposons qu'un tel c existe. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c2^{n+1} = 3c2^n + 2^n$. Donc $2c = 3c + 1$ et $c = -1$. Réciproquement, on vérifie que $c = -1$ convient.
2. Les deux suites ne sont pas égales car $a_0 = -1$ et $u_0 = 1$.
3. La suite $v_n = u_n - a_n$ est géométrique de raison 3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2\cdot 3^n$. Donc $u_n = 2\cdot 3^n - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice I.14 :

1. Si (u_n) est arithmétique, alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Donc $\dfrac{u_n + u_{n+2}}{2} = \dfrac{u_{n+1} - r + u_{n+1} + r}{2} = u_{n+1}$.
   Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = u_n + u_{n+2}$, donc $u_{n+1} - u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$. Ainsi la suite est arithmétique.
2. Si (u_n) est géométrique, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$, donc $\sqrt{u_{n+2}u_n} = \sqrt{qu_{n+1}\dfrac{u_{n+1}}{q}} = u_{n+1}$ car la suite est positive.
   Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2}$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$. Ainsi la suite est géométrique.

Exercice II.1 : Pour les quatre premières, on factorise par le terme de plus haut degré.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^2+3n-1}{(2n+1)(n+2)}=\dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n-1}{4^n-1}=0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-3n+1}{1-n^2}=-1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{e^n-n}=0$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}k=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$ (quantité conjuguée)

h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln n}=1$ (croissances comparées)

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^4+n^2-2}-n^2-n=-\infty$ (quantité conjuguée + terme de plus haut degré)

Exercice II.2 : Étudier les suites de terme général (convergence ou divergence, et limite éventuelle) :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-1}{1+n!}=0$

b) $\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1\times2\times\ldots\times n}{n\times n\times\ldots n}\le\dfrac{1}{n}$, donc la limite vaut 0.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n-n}=-1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+\cos n}{4(n+1)^2+\sin 3n}=\dfrac{3}{4}$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}n(2+\cos n)=+\infty$ car $2+\cos n\ge1$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+\sin\left(3\exp\left(\frac{n!}{(\ln n)^n}\right)\right)}{n^2}=0$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{E\left[(3n-\frac{1}{2})^2\right]}{E\left[(4n+\frac{1}{2})^2\right]}=\dfrac{9}{4}$ (utiliser les encadrements des parties entières pour encadrer la suite).

h) $u_{2n}=\dfrac{2+2n}{2n}+1=3+\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}3$ et $u_{2n+1}=\dfrac{2-(2n+1)}{2n+1}-1=\dfrac{2}{2n+1}-2\xrightarrow[n\to+\infty]{}-2$, donc la suite diverge.

i) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=0$, donc la suite diverge.

j) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=-1$, donc la suite diverge.

k) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\dfrac{2^n}{3^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=3\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)}=3$.

l) $0\le u_n\le\dfrac{n\times n^4}{n^6}$, donc avec les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^6}\sum\limits_{k=1}^{n}k^4=0$.

m) $\dfrac{n\times n}{\sqrt{n^4+n}}\le u_n\le\dfrac{n\times n}{\sqrt{n^4+1}}$, donc d'après les gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

n) $u_{16n}=\dfrac{1}{16n}+\cos(2n\pi)=\dfrac{1}{16n}+1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $u_{8n}=\dfrac{1}{8n}+\cos(n\pi)=\dfrac{1}{8n}-1\xrightarrow[n\to+\infty]{}-1$, donc la suite diverge.

o) Pour $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$, $kx-1\lfloor kx\rfloor\le kx$, donc $\dfrac{x}{n^2}\dfrac{n(n+1)-2n}{2}<u_n\le\dfrac{x}{n^2}\dfrac{n(n+1)}{2}$, et les deux côtés tendent vers $\dfrac{x}{2}$.

Exercice II.3 :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme M est la borne supérieure de A, il existe $u_n\in A$ tel que $M-\dfrac{1}{n}\le u_n\le M$. On définit ainsi une suite (u_n) d'éléments de A qui vérifie par encadrement que $u_n\to M$.
2. Soit $a<M$ et posons $\varepsilon=\dfrac{M-a}{2}>0$. Comme $u_n\to M$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le M$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\ge N$, $M-u_n\le\dfrac{M-a}{2}$. Donc $u_N-a\ge\dfrac{M-a}{2}>0$. Ainsi, a n'est pas un majorant de A. Donc M est le plus petit majorant de A : $M=\sup(A)$.
3. 1 est un majorant de $[0,1[$, et $1-\dfrac{1}{n}\to1$.

Exercice II.4 : Supposons que $u_n\to\ell$. Prenons $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\ge N$, $|u_n-\ell|\le\dfrac{1}{3}$. Prenons alors $n\ge N$, et $|u_n-u_N|\le|u_n-\ell|+|ell-u_N|\le\dfrac{2}{3}<1$. Comme u_n et u_N sont des entiers, ils sont égaux.

Exercice II.5 :

1. Prenons $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\ge N$, $|u_n-\ell|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Alors $|v_n-\ell|=\dfrac{1}{n}|\sum\limits_{k=1}^{n}(u_n-\ell)|\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N-1}|u_k-\ell|+\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=N}^{n}|u_k-\ell|\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N-1}|u_k-\ell|+\dfrac{n-N+1}{n}\dfrac{\varepsilon}{2}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N-1}|u_k-\ell|++\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\ge N_1$, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N-1}|u_k-\ell|\le\dfrac{\varepsilon}{2}$.

   Pour $n\ge\max(N,N_1)$, $|v_n-\ell|\le\varepsilon$.

2. D'après la question précédente, la suite $v_n = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$ tend vers ℓ. Donc $\dfrac{u_n-u_1}{n-1}$ tend vers ℓ. D'où $\dfrac{u_n}{n-1} \to \ell$. Or $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{u_n}{n-1}\dfrac{n-1}{n} \to \ell$.
3. Si $\ell > 0$, alors $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \to \ln(\ell)$ et on applique la question précédente.
   Si $\ell = 0$, on prend $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \varepsilon$, donc $u_{n+1} \leq \varepsilon u_n$. Par récurrence, pour $n \geq N$, $u_n \leq u_N \varepsilon^{n-N}$, puis $u_n^{\frac{1}{n}} \leq (u_N\varepsilon^{-N})^{\frac{1}{n}}\varepsilon$. On utilise ensuite que $(u_N\varepsilon^{-N})^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc il existe $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$, $(u_N\varepsilon^{-N})^{\frac{1}{n}} \leq 2$, d'où $u_n^{\frac{1}{n}} \leq 2\varepsilon$, et $u_n^{\frac{1}{n}} \to 0$.
4. On calcule $\dfrac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \to 4$, donc $\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}^{\frac{1}{n}} \to 4$.
   En posant $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$, donc $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e}$.

Exercice II.6 :

1. $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$, donc on vérifie par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. $f(x) = x \iff x = \dfrac{5\pm\sqrt{29}}{2}$, donc $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} > 1$.
3. $f([0,\alpha]) = [1,\alpha] \subset [0,\alpha]$ et $f([\alpha,+\infty[) = [\alpha,6[\subset [\alpha,+\infty[$.
4. Comme f est croissante sur $[0,\alpha]$ qui est stable par f, (u_n) est monotone et reste dans $[0,\alpha]$. On remarque ensuite que $f(x)-x$ est positif sur $[0,\alpha]$, donc $u_1 \geq u_0$ et (u_n) est croissante. Elle converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$. Comme $\ell > 0$, on a $\ell = \alpha$.
5. Même chose mais (u_n) est décroissante car $f(x)-x$ est négatif sur $[\alpha,+\infty[$.
6. On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+7x}{2}} - 1$ définie sur $[1,+\infty[$. La fonction f est croissante sur $[1,+\infty[$ et $f(1) = 1$, donc $[1,+\infty[$ est stable par f et (u_n) est bien définie et monotone.
   On remarque ensuite que $f(x) = x \iff x \in \{1,2\}$, donc les intervalles $[1,2]$ et $[2,+\infty[$ sont stables par f. De plus, $f(x)-x$ est postif sur $[1,2]$ et négatif sur $[2,+\infty[$.
   Ainsi, si $u_0 \in]1,2]$, la suite est croissante et majorée donc converge vers ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ et $\ell > 1$. Donc $\ell = 2$.
   De même si $u_0 \geq 2$ mais (u_n) est décroissante.
   Si $u_0 = 1$, la suite est stationnaire.
   Si $u_0 \in [0,1[$, il pourrait arriver que la suite n'est pas bien définie à partir d'un certain rang car f prend des valeurs négatives. Si on suppose le contraire, on montre alors par récurrence que $u_n \in [0,1[$. La suite (u_n) est toujours monotone et on vérifie qu'elle est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers $\ell = 1$ ou 2, mais ce n'est pas possible. Ainsi, dans ce cas, la suite n'est pas bien définie.

Exercice II.7 :

1. f est croissante sur $]-\infty,1/2]$ et décroissante sur $[1/2,+\infty[$.
2. L'intervalle $[0,1]$ est stable par f. Donc on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$. Puis, (u_n) est décroissante car $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$. Donc (u_n) converge vers une limite ℓ. De plus, $f(\ell) = \ell$, donc $\ell^2 = 0$ et $\ell = 0$.
3. La suite (u_n) est toujours décroissante. De plus, si elle convergeait, alors ℓ vaudrait 0 (voir question précédente. Or $\ell \leq u_0 < 0$, ce qui est une contradiction. Donc (u_n) tend vers $-\infty$.
4. On remarque que $u_1 < 0$, et on peut refaire comme avant, donc (u_n) tend encore vers $-\infty$.

Exercice II.8 : On encadre u_n : $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x$, donc $x - \dfrac{1}{10^n} < u_n \leq x$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = x$.

Exercice II.9 :

1. Pour $k > 1$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, et $u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{k} = 1 + 1 - \dfrac{1}{n} \leq 2$.

Exercice II.10 :

1. $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.
2. La suite (H_n) est croissante. Si elle convergeait vers une limite finie, alors (H_{2n}) convergerait vers la même limite. Or avec la question précédente, ce n'est pas le cas. Donc $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice II.11 :

1. On utilise Newton : $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}2^k(\sqrt{3}^{n-k} + (-\sqrt{3})^{n-k}) = 2\sum_{\substack{k=0\\ n-k \text{ pair}}}^{n}\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}2^k 3^{\frac{n-k}{2}}$ qui est bien un entier pair.

2. $|u_n| = |\sin\left(\frac{\pi}{2}((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n) - \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n\right)| = |\sin(k\pi - \frac{\pi}{2}(2-\sqrt{3})^n)| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n/2)| \to 0$ car $0 \leq 2-\sqrt{3} < 1$.

Exercice II.12 :

1. $u_{2n} = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n+1} = \cos((2n+1)\pi) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. Donc (u_n) diverge.
2. (a) $c_{n+1} = c_n\cos\theta - s_n\sin\theta$ et $s_{n+1} = c_n\sin\theta + s_n\cos\theta$.
   (b) Supposons que (c_n) converge. Alors (s_n) converge aussi à cause de la première égalité, car $\sin\theta \neq 0$. Les deux limites c et s vérifient $c = c\cos(\theta) - s\sin(\theta)$ et $s = c\sin(\theta) + s\cos(\theta)$. En résolvant le système, on trouve $c\dfrac{2-2\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0$. Or $\cos(\theta) \neq 1$, donc $c = 0$. Puis, $s(1-\cos(\theta) = 0$, donc $s = 0$. Or $c^2 + s^2 = 1$ ce qui donne une contradiction.
   Si on suppose que (s_n) converge, (c_n) aussi à cause de la deuxième égalité et on retombe sur la même contradiction.

Exercice II.13 : Notons ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites des trois suites extraites. Comme (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}) et (u_{3n}), elle converge vers ℓ_1 et ℓ_3, donc $\ell_1 = \ell_3$. De même la suite (u_{6n+3}) est extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}), donc $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$. D'après le résultat du cours, la suite (u_n) converge aussi vers ℓ_1.

Exercice II.14 :

1. On commence par montrer par récurrence que $|u_n| \leq k^n|u_0|$, puis on utilise les gendarmes.
2. (a) Prenons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \leq \dfrac{1-\ell}{2}$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1+\ell}{2} < 1$. On applique alors la question précédente.
   (b) La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ vérifie les conditions de la question précédente, donc $\dfrac{1}{u_n} \to 0^+$, et $u_n \to +\infty$.

Exercice II.15 : $L_{2n+2} - L_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{-1}{(2n+2)(2n+1)} \leq 0$, donc (L_{2n}) est décroissante. $L_{2n+3} - L_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)} \geq 0$, donc (L_{2n+1}) est croissante. $L_{2n+1} - L_{2n} = \dfrac{-1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi les deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux vers la même limite. D'après la question précédente, la suite (L_n) converge.

Exercice II.16 :

- Pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.
- Pour $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{n\cdot n!} = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)}\right) < 0$, donc (v_n) est strictement décroissante.
- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n\cdot n!} \to 0$.

Les deux suites sont bien adjacentes et tendent vers une limite ℓ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell < v_n$ (les inégalités sont strictes car les suites sont strictement monotones). Supposons par l'absurde que $\ell = \dfrac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $q!u_q < p\cdot(q-1)! < q!u_q + 1$, or $q!u_q \in \mathbb{N}$ et $p\cdots(q-1)! \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde car on a un entier coincé entre deux autres qui sont consécutifs.

Exercice II.17 :

1. $\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right| = \left|1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right| \leq 4$ donc $b_n = O(a_n)$.
   $\dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{\ln(n)}{n^2} \to 0$ par croissances comparées donc $c_n = o(a_n)$.
   $\dfrac{d_n}{a_n} = 1 - \dfrac{5}{2n} + \dfrac{\sqrt{3}}{n^2} \to 1$ donc $d_n \sim a_n$.
2. $\dfrac{w_n}{v_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{2n} \to 0$ et $\dfrac{u_n}{w_n} = \mathrm{e}^n n^3 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \to +\infty$.
3. (a) $u_n = o(v_n)$; (b) $v_n = o(u_n)$.
4. (a) $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$.
   (b) $\ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) \sim \dfrac{2}{n^2}$.

Exercice II.18 : On utilise les limites :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = (\ln)'(1) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = (\sin)'(0) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = (\mathrm{e})'(0) = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = ((1+x)^\lambda)'(0) = \lambda$

Exercice II.19 :

1. $u_{n+1}-u_n=-\ln(n+1)+\ln n+\dfrac{1}{n+1}=-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}$ et $v_{n+1}-v_n=-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n+1}$. Définissons $f:[2,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $f(x)=-\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}$. Sa dérivée vaut $f'(x)=-\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x^2}\leq 0$, donc f est décroissante et $(u_{n+1}-u_n)$ aussi. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}-u_n=0$, pour tout $n\geq 2$, $u_{n+1}-u_n\geq 0$ et la suite (u_n) est croissante. On procède de même avec (v_n) qui est décroissante. De plus, $v_n-u_n=\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc les deux suites sont adjacentes.
2. On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers un même réel γ (qu'on appelle constante d'Euler). Or, $v_n=-\ln n+H_n$, donc $\dfrac{H_n}{\ln n}=1+\dfrac{v_n}{\ln n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc $H_n\sim\ln n$. On a même mieux : $H_n=\ln n+v_n=\ln n+\gamma+o(1)$.

Exercice II.20 :

a) $u_n=n^2+2n+3\sim n^2$

b) $u_n=\dfrac{2n^5-4n^2+3}{3n^2-8n+7}\sim\dfrac{2}{3}n^3$

c) $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sim\dfrac{1}{n}$

d) $u_n=\dfrac{n}{n+1}\sim 1$

e) $u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{2^n}\sim\dfrac{1}{n^2}$

f) $\dfrac{4^{n+1}+n^3}{2^n+n}\sim 4\times 2^n$

g) $\dfrac{\mathrm{e}^n-\mathrm{e}^{-n}}{2}\sim\dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\sim\frac{n^2}{2}$

i) $\dfrac{n+\sqrt{n}+(\ln n)^{10}}{n^2+1}\sim\dfrac{1}{n}$

j) $\dfrac{n^3+2^n}{n^3+2n}\sim\dfrac{2^n}{n^3}$

k) $\dfrac{n+1}{n!+5^n}\sim\dfrac{1}{(n-1)!}$

l) $\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\dfrac{1}{2n}$

m) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sim\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

n) $u_n=\sqrt[3]{n^2+n+1}\sim n^{2/3}$

o) $u_n=\ln(n+1)=\ln(n)+\ln(1+1/n)\sim\ln(n)$

p) $u_n=\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}=\sqrt{\ln(1+1/n)}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice II.21 :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$.
2. $u_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-6n^2+4n-1}{2n^3-2n}\sim-\dfrac{3}{n}$.
3. $u_n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{n}=\dfrac{4n-7}{2n^3-2n}\sim\dfrac{2}{n^2}$, donc $u_n-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{n}=\dfrac{2}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Exercice II.22 : On remarque que pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, $\dfrac{1}{n^2+2n}\leq\dfrac{1}{n^2+k}\leq\dfrac{1}{n^2+n+1}$, donc $\dfrac{n}{n^2+2n}\leq u_n\leq\dfrac{n}{n^2+n+1}$. Or les deux termes qui encadrent sont équivalents à $\dfrac{1}{n}$, d'où $u_n\sim\dfrac{1}{n}$.