Contrôle de cours 11 - Suites numériques / Matrices - Sujet A
Mercredi 14 janvier 2026

Question 1 (2 pts)

Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{3^n - n^{10} + 1}{\ln(n) - \sqrt{n}}$
   Comme $n^{10} = o(3^n)$ et $1 = o(3^n)$, $3^n - n^{10} + 1 \sim 3^n$
   Comme $\ln(n) = o(\sqrt{n}), \ln(n) - \sqrt{n} \sim -\sqrt{n}$.
   Donc $u_n \sim \dfrac{3^n}{-\sqrt{n}}$.
2. $v_n = \dfrac{n - \sqrt{n^4 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$
   Comme $n^4 + 1 \sim n^4$, $\sqrt{n^4+1} \sim n^2$, et $n = o(n^2)$, donc $n - \sqrt{n^4+1} \sim -n^2$.
   Comme $\ln(n) = o(n^2), \ln(n) - 2n^2 \sim -2n^2$.
   Ainsi, $v_n \sim \dfrac{-n^2}{-2n^2} = \dfrac{1}{2}$.

☐

Question 2 (1 pt)

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Question 3 (1 pt)

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

☐

Question 4 (3 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Compléter : $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
2. Peut-on calculer AB ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.
   Oui. On obtient $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Peut-on calculer BA ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.
   Non car B a 2 colonnes et A a 3 lignes.

☐

Question 5 (1 pt)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire A comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires.

$A = 3E_{1,1} - E_{2,1} + 2E_{2,2}$. ☐

Question 6 (1 pt)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est symétrique si : $A^\top = A$
2. A est antisymétrique si : $A^\top = -A$ ☐

Question 7 (3 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que $A^2 = I_2$. Donc si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et $A^n = (A^2)^k = I_2^k = I_2$, et si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et $A^n = A^{2k}A = A$. ☐

Question 8 (3 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier).

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $AB = 0_n$ alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si A et B sont triangulaires supérieures, alors $\forall (i,j)$, $[AB]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}$. ☐ VRAI ■ FAUX
3. $(AB)^\top = A^\top B^\top$. ☐ VRAI ■ FAUX
4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ VRAI ■ FAUX
5. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire. ■ VRAI ☐ FAUX
6. Soit $X, C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = C$. Alors $X = \dfrac{C}{A}$. ☐ VRAI ■ FAUX ☐

Contrôle de cours 11 - Suites numériques / Matrices - Sujet B
Mercredi 14 janvier 2026

Question 1 (2 pts)

Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{n - \ln(n) + \frac{4}{n}}{e^n - n^2}$

   Comme $\ln(n) = o(n)$ et $\dfrac{4}{n} = o(n)$, $n - \ln(n) + \dfrac{4}{n} \sim n$

   Comme $n^2 = o(e^n)$, $e^n - n^2 \sim e^n$.

   Donc $u_n \sim \dfrac{n}{e^n}$.

2. $v_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln(n) - 2n^2}$

   Comme $n^2 + 1 \sim n^2$, $\sqrt{n^2+1} \sim n$, donc $\sqrt{n^2+1} = o(n^3)$ et $n^3 - \sqrt{n^2+1} \sim n^3$.

   Comme $\ln(n) = o(n^2)$, $\ln(n) - 2n^2 \sim -2n^2$.

   Ainsi, $v_n \sim \dfrac{n^3}{-2n^2} = -\dfrac{n}{2}$. □

Question 2 (1 pt)

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$.

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Question 3 (1 pt)

Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

□

Question 4 (3 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Compléter : $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Peut-on calculer AB ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.
   Non car A a 2 colonnes et B a 3 lignes.
3. Peut-on calculer BA ? Si oui, faire le calcul ci-dessous.
   Oui. On obtient $BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. □

Question 5 (1 pt)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Écrire A comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires.

$A = 3E_{1,1} + E_{1,2} - 2E_{2,2}$. ☐

Question 6 (1 pt)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. A est symétrique si : $A^\top = A$
2. A est antisymétrique si : $A^\top = -A$ ☐

Question 7 (3 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que $A^2 = 0_2$, donc pour tout $n \geq 2$, $A^n = A^{n-2}A^2 = 0_2$. ☐

Question 8 (3 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier).
Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $AB = 0_n$ alors $A = 0_n$ ou $B = 0_n$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si A et B sont diagonales, alors $\forall (i, j)$, $[AB]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}$. ■ VRAI ☐ FAUX
3. $(AB)^\top = B^\top A^\top$. ■ VRAI ☐ FAUX
4. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■ VRAI ☐ FAUX
5. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire. ■ VRAI ☐ FAUX
6. Soit $X, C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $AX = C$. Alors $X = \dfrac{C}{A}$. ☐ VRAI ■ FAUX ☐