Chapitre 15 : Calcul matriciel

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appellera **scalaire** un élément de $\mathbb{K}$.

I. Matrices

I.1. Définitions et matrices particulières

Définition I.1. Une matrice A de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille d'éléments indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] = \{(i,j) \mid i \in [\![1,n]\!] \text{ et } j \in [\![1,p]\!]\}$. On écrit :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On pourra aussi noter $a_{ij} = [A]_{ij}$.
On dit que deux matrices sont égales ssi leurs coefficients sont égaux.
On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque I.1.
- Lorsque la matrice a une seule ligne, on dit que c'est une **matrice ligne**.
- Lorsque la matrice a une seule colonne, on dit que c'est une **matrice colonne**.
- Lorsque $n = p$, on dit que c'est une **matrice carrée** de taille n, et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Définition I.2. La matrice de taille $n \times p$ qui n'a que des 0 est la **matrice nulle** : $0_{n,p}$.

I.2. Sommes de matrices et multiplication par un scalaire

Définition I.3. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit la matrice $\lambda A + \mu B$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [\lambda A + \mu B]_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}.$$

C'est une **combinaison linéaire** des deux matrices A et B.

Remarques I.2.
1. En prenant $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, on obtient la somme des deux matrices A et B.
2. Attention : on ne peut faire des combinaisons linéaires que des matrices de **même taille**.
3. La matrice nulle est **l'élément neutre** pour la somme matricielle : pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
4. Cette opération a les mêmes règles de calcul que pour les vecteurs : pour $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $A+B = B+A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ et $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Définition I.4. On dit que la matrice $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une **combinaison linéaire** des matrices $A_1, \dots, A_r \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $C = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_r A_r$.
On note $\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_r)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des matrices $A_1, \dots, A_r$.

Définition I.5. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est sur la i-ième ligne et j-ème colonne. C'est une **matrice élémentaire**.

Proposition I.1. *Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires : $A = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} E_{i,j}$. Ainsi, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{n,n})$.*

I.3. Produit matriciel

Définition I.6. Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Le produit de A et X est la combinaison linéaire des colonnes de A avec les coefficients de X :

$$AX=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix}+\ldots+x_p\begin{pmatrix}a_{1p}\\a_{2p}\\\vdots\\a_{np}\end{pmatrix}$$

Remarque I.3. Il faut absolument que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de X.

Définition I.7. Soient $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit des matrices A et B est la matrice $AB\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient (i,j) est $[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$.

Remarques I.4.
- Il faut absolument que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
- La j-ième colonne de AB est le produit de A avec la j-ième colonne de B.

Proposition I.2. *Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i\in[\![1,n]\!]$ et $j\in[\![1,p]\!]$.*
- $A\times\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ *(le 1 en position j) est la j-ième colonne de A.*
- $\begin{pmatrix}0&\cdots&1&\cdots&0\end{pmatrix}\times A$ *(le 1 en position i) est la i-ième ligne de A.*

Définition I.8. La **matrice identité** de taille n est la matrice carrée $I_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale ($i=j$) et valent tous 1.

Proposition I.3.
1. *Le produit matriciel est **associatif** :*
$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\forall C\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),A(BC)=(AB)C.$$
2. *Le produit matriciel est **bilinéaire** :*
$$\forall A,D\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B,C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},A(\lambda B+\mu C)=\lambda AB+\mu AC\quad \textit{et}\quad(\lambda A+\mu D)B=\lambda AB+\mu DB.$$
3. *Le produit matriciel a un **élément neutre** :*
$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),AI_p=I_nA=A.$$

Remarques I.5. Si $n\geq 2$:
- Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif!
- Attention : le produit matriciel n'est pas intègre : si on a $AB=0$, cela ne signifie pas forcément que $A=0$ ou $B=0$!
- Il existe des matrices $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulles dites **nilpotentes** : il existe $k\in\mathbb{N}$ telles que $N^k=0_n$.

Proposition I.4. *Soient $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}$ deux matrices élémentaires. Alors $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{jk}E_{i,l}$, où $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le* ***symbole de Kronecker****.*

Définition I.9. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$.

On convient que $A^0 = I_n$.

Théorème I.5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ $\boxed{\text{telles que } AB = BA}$. Alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

I.4. Transposée d'une matrice

Définition I.10. Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de la matrice M la matrice $M^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$ est $[M^\top]_{ij} = m_{ji}$.

Cette opération transforme les lignes d'une matrice en colonnes et vice-versa.

Proposition I.6. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*
1. $(A^\top)^\top = A$ *2. Linéarité : $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$* *3. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.*

Définition I.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- **symétrique** si $A^\top = A$;
- **antisymétrique** si $A^\top = -A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition I.7. *La combinaison linéaire de deux matrices symétriques (resp. antisymétriques) est une matrice symétrique (resp. antisymétrique).*

I.5. Matrices diagonales et triangulaires

Définition I.12. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :

- **diagonale** si ses seuls coefficients non nuls sont sur la diagonale :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i = j$$
- **triangulaire supérieure** si ses seuls coefficients non nuls sont au-dessus de la diagonale :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \leq j$$
- **triangulaire inférieure** si ses seuls coefficients non nuls sont en-dessous de la diagonale :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \geq j$$

Remarques I.6. • Une matrice de la forme λI_n est appelée **matrice scalaire**.

• On pourra écrire $\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Proposition I.8. *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*
Si A et B sont diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) alors $\lambda A + \mu B$ et AB sont diagonales (resp. triangulaire supérieures, resp. triangulaire inférieures).
De plus, $\forall i \in [\![1, n]\!], [AB]_{ii} = [A]_{ii}[B]_{ii}$.

Remarque I.7. En particulier, si $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = \mathrm{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$.

II. Ensemble des solutions d'un système linéaire

Remarque II.1. On peut identifier l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$.

Le système linéaire

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

peut s'écrire matriciellement : $AX = B$, où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^p$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$.
Lorsque le système est homogène, c'est-à-dire lorsque $B = 0_{n,1}$, on a toujours $0_{p,1}$ comme solution. On note S_H l'ensemble des solutions de $AX = 0_{n,1}$.

Théorème II.1

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \dots, A_p$ et $B \in \mathbb{K}^n$.
Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_p)$. Dans ce cas, si $X_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière du système, l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{X_0 + X_H, X_H \in S_H\}.$$

En pratique, on utilise le pivot de Gauss pour résoudre un système.

III. Matrices inversibles

III.1. Systèmes de Cramer

Définition III.1. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
La matrice B est alors unique et s'appelle **l'inverse de** A et est notée A^{-1}.
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: c'est le **groupe linéaire**.

Remarque III.1. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $AB = AC$, alors $A^{-1}AB = A^{-1}AC$, donc $B = C$.

Théorème III.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si une colonne (resp. une ligne) de A est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes), alors A n'est pas inversible.
En particulier, si une des colonnes (resp. lignes) de A est nulle, alors A n'est pas inversible.

Remarque III.2. La réciproque est vraie, mais on ne verra la démonstration que plus tard dans l'année.

Proposition III.2. *Une matrice diagonale $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.*
Dans ce cas son inverse est $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$.

Dans le cas général, on utilise le théorème suivant :

Théorème III.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = Y$ a une unique solution.
*On dit dans ce cas que le système est **de Cramer**.*

Méthode. Pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A, on essaye de résoudre le système $AX = Y$:

- si le système est toujours compatible quel que soit Y, alors en le résolvant, on obtient X en fonction de Y, c'est-à-dire, $X = A^{-1}Y$: on lit les coefficients de A^{-1} dans le système renversé.
- sinon, la matrice A n'est pas inversible.

III.2. Matrices inversibles de taille 2

Proposition III.4. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On pose* $\det(A) = ad - bc$.
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ *et alors* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

III.3. Un outil : le déterminant

On admet pour l'instant qu'on peut définir une application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie la propriété : $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(M) \neq 0$. On peut donc tester si une matrice est inversible en calculant son déterminant.
On a déjà donné son expression pour une matrice de taille 2. Dans le cas général, il n'y a pas de formule simple, mais on a des outils de calcul.

Proposition III.5. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Si on ajoute à une ligne (ou à une colonne) de M une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes), on ne change pas le déterminant.*
- *Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de M, on change le signe du déterminant.*
- *Si M est triangulaire,* $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} [M]_{ii}$.

Grâce à cette propriété, on se ramène à une matrice avec une ligne (ou une colonne) n'ayant qu'un seul coefficient non nul. On peut alors développer par rapport à cette ligne (ou colonne) pour se ramener à un déterminant de taille 1 de moins, et on recommence jusqu'à arriver à un déterminant 2×2.

Proposition III.6. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant obtenu en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de M. On a :*

- *développement par rapport à une ligne :* $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\det(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [M]_{ij} \Delta_{i,j}$;
- *développement par rapport à une colonne :* $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\det(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [M]_{ij} \Delta_{i,j}$;

III.4. Inverse et opérations

Proposition III.7. *Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

1. *A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*
2. *AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.*
4. *$A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

Remarque III.3. Les deux premières propriétés nous assurent que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe.

Proposition III.8 (Admis pour l'instant). *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*
2. *S'il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = C$.*

III.5. Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes

III.5.1 Échange de lignes ou de colonnes

Définition III.2. Soit $n \geq 1$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle **matrice de transposition** la matrice :

$$P_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i\rightarrow \\ \\ \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
&\ddots&&&&&&&&& \\
&&1&&&&&&&& \\
&&&0&&&&1&&& \\
&&&&1&&&&&& \\
&&&&&\ddots&&&&& \\
&&&&&&1&&&& \\
&&&1&&&&0&&& \\
&&&&&&&&1&& \\
&&&&&&&&&\ddots& \\
&&&&&&&&&&1
\end{pmatrix} \\
& \begin{array}{ccccccccccc} &&&\uparrow &&&&\uparrow&&& \\ &&&i&&&&j&&& \end{array}
\end{array}$$

Proposition III.9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.*

1. *Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $P_{i,j}M$ est obtenue à partir de M en échangeant les lignes i et j.*
2. *Pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $NP_{i,j}$ est obtenue à partie de N en échangeant les colonnes i et j.*
3. *La matrice $P_{i,j}$ est inversible et son inverse est elle-même : $P_{i,j}^2 = I_n$.*

III.5.2 Dilatation

Définition III.3. Soit $n \geq 1$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle **matrice de dilatation** la matrice :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \overset{i}{\downarrow} & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition III.10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

1. *Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $D_i(\lambda)M$ est obtenue à partir de M en multipliant la ligne i par λ.*
2. *Pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $ND_i(\lambda)$ est obtenue à partie de N en multipliant la colonne i par λ.*
3. *La matrice $D_i(\lambda)$ est inversible et son inverse est $D_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.*

III.5.3 Transvections

Définition III.4. Soit $n \geq 1$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle **matrice de transvection** la matrice :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition III.11. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $T_{i,j}(\lambda)M$ est obtenue à partir de M en ajoutant λ fois la ligne j à la ligne i.*
2. *Pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $NT_{i,j}(\lambda)$ est obtenue à partie de N en ajoutant λ fois la colonne i à la colonne j.*
3. *La matrice $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et son inverse est $T_{i,j}(-\lambda)$.*

Remarque III.4. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice d'opération élémentaire, alors $X \in \mathbb{K}^p$ est solution de $AX = B$ si et seulement si il est solution de $MAX = MB$, car M est inversible. C'est le principe de base du pivot de Gauss.

III.5.4 Calcul de l'inverse par opérations élémentaires

Proposition III.12. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice d'opération élémentaire. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff MA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff AM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Méthode. Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut déterminer si elle est inversible sans passer par les systèmes. En effet, en multipliant A par une matrice d'opération élémentaire, la matrice obtenue sera inversible ssi A était inversible. On applique donc l'algorithme du pivot et deux cas se présentent :

- si au cours de l'algorithme on arrive à une matrice qui n'est pas inversible (car elle a une ligne/colonne qui est CL des autres), alors A n'est pas inversible ;
- sinon, on a trouvé des matrices $E_1, E_2, \dots, E_r \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $E_r \cdots E_2 E_1 A = I_n$ (si on fait les opérations sur les lignes). Autrement dit, la matrice $E_r \cdots E_2 E_1$ est l'inverse de A.

En pratique, on applique le pivot de Gauss sur $(A|I_n)$ pour obtenir à la fin $(I_n|A^{-1})$.

III.6. Matrices triangulaires inversibles

Proposition III.13. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], a_{ii} \neq 0$. Dans ce cas, A^{-1} est aussi triangulaire du même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.*