Colles 15 - 19/01/2026 au 23/01/2026

Thèmes traités en classe

- Chapitre 14 : Suites numériques.
  Exercices traités en classe : I.1, I.2 I.3, I.4, I.5, I.8, I.9, I.10, I.13, II.2, II.3, II.4, II.5, II.6, II.7, II.8, II.9, II.10, II.15, II.17, II.18, II.19, II.20, II.21, II.12, II.14.
- Chapitre 15 : Calcul matriciel.
  1. Combinaisons linéaires de matrices.
  2. Produit matriciel, puissances de matrices carrées, Newton.
  3. Matrices élémentaires.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3.

Questions de cours

Question 1

- Toute suite convergente est bornée : énoncé et démonstration.
- Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell > 0$. Alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ, alors (u_n) tend aussi vers ℓ. Démonstration lorsque $\ell \in \mathbb{R}$.
- Énoncer le théorème d'encadrement. Démontrer le cas où la suite est majorée par une suite qui tend vers $-\infty$.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas croissant.
- C14 Exercice II.10 : Montrer que la suite (H_n) définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $H_n \to +\infty$.
- C14 Exercice II.15 : On définit la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par son terme général $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (L_{2n}) et (L_{2n+1}) sont adjacentes, puis en déduire la nature de la suite (L_n).
- Sur demande, pour les plus motivés : C14 Exercice II.5 : soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \ell$.
- Définition de domination, négligeabilité, équivalence. Montrer que $n! = o(n^n)$.
- C14 Exercice II.19 : Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $v_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
- C14 Exercice II.14 : Soit (u_n) une suite numérique et $k \in]0,1[$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$. Montrer que (u_n) converge vers 0.
- Définition du produit matriciel : avec la formule et avec un dessin. Calcul du produit de deux matrices élémentaires avec un dessin.
- Énoncer la formule du binôme de Newton puis C15 Exercice 3 : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Bornitude et opérations.
  - ▷ Propriétés des suites arithmétiques/géométriques.
  - ▷ Théorèmes qui donnent l'expression d'une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2.
  - ▷ Convergence et bornitude.

- ▷ Unicité de la limite.
- ▷ Limites et bornes sup/inf.
- ▷ Limites et inégalités.
- ▷ Théorème de comparaison.
- ▷ Théorème de limite monotone.
- ▷ Théorème des suites adjacentes.
- ▷ Croissances comparées avec des o.
- ▷ Produit de deux matrices élémentaires.
- ▷ Binôme de Newton pour les matrices.

A savoir faire

1. Étudier la monotonie d'une suite.
2. Savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique et d'une suite récurrente d'ordre 2.
3. Savoir utiliser l'étude des fonctions f et $x \mapsto f(x) - x$ pour étudier la monotonie de $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Connaître les définitions de $u_n \to \ell$ et $u_n \to \pm\infty$.
5. Savoir appliquer proprement les théorèmes d'encadrement et de la limite monotone.
6. Savoir encadrer une somme en utilisant le plus petit terme et le plus grand terme.
7. Savoir montrer que deux suites sont adjacentes.
8. Savoir trouver un équivalent simple d'une suite et en déduire une limite.
9. Savoir calculer un produit matriciel.
10. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
    (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,
    (b) en appliquant Newton.