Calcul matriciel - Exercices

Exercice 1. On considère des matrices $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, $D \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, $E \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ et $F \in \mathscr{M}_{4,5}(\mathbb{K})$. Quels sommes/produits de deux de ces matrices peut-on faire ? Indiquer les dimensions de la matrice résultat.

Exercice 2. Calculer le produit des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n, avec :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_3 + B$. Calculer B^n puis en déduire A^n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la question 2, calculer A^n avec :
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace** de A la somme de ses coefficients diagonaux : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(A^\top) = \operatorname{tr}(A)$.
2. Montrer que la trace est linéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.
3. Montrer que pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0 \iff A = 0_{n,n}$.
5. Trouver toutes les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 5.

1. Montrer que deux matrices symétriques commutent si et seulement si leur produit est symétrique.
2. Montrer que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 6. Soient $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$ des scalaires tous distincts. Déterminer les matrices qui commutent avec $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Exercice 7.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$. Déterminer les coefficients $[E_{k,l}M]_{ij}$ et $[ME_{k,l}]_{ij}$.
2. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.

Exercice 8. Résoudre les systèmes linéaires :

1. $\begin{cases} x + y + z - t &= 1 \\ x - y - z + t &= 2 \\ x - y - z - t &= 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 &= 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t &= 4 \\ y - z + t &= -3 \\ x + 3y - 3t &= -3 \\ x + 2y + z - 4t &= 4 \end{cases}$.

Exercice 9.

1. Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dont les deux coefficients diagonaux sont égaux. Montrer que toutes les matrices de E commutent.
2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 19 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11. Dans chaque cas, dire si A est inversible, puis calculer son inverse le cas échéant :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A \begin{pmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 8 & 5 & 8 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(6,6,-5)$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quelle est son inverse ?

Exercice 13. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier $r > 0$ tel que $A^r = 0_{n,n}$.

1. Vérifier que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais que $A + B$ et AB ne le sont pas.
2. Montrer que si A est nilpotente, alors A n'est pas inversible.
   On pourra raisonner par l'absurde.
3. Calculer $(I_n - A) \sum_{k=0}^{r-1} A^k$ et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 14.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et en déduire que A est inversible. Déterminer son inverse.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^3 puis exprimer B^3 comme une combinaison linéaire de B^2 et B. En déduire que B n'est pas inversible.

Exercice 15. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $M(t)$ est-elle inversible ?
2. Déterminer deux réels $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ tels que $M(t)^2 = \alpha(t)M(t) + \beta(t)I_3$.
3. Retrouver le résultat de la question 1.
4. On prend $t = -1$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(-1)^n = a_n M(-1) + b_n I_3$.
5. Montrer que (a_n) est une suite récurrente d'ordre 2 puis déterminer son expression.
6. En déduire une expression de $M(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

1. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(PAP^{-1}\right)^n = PA^nP^{-1}.$$
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -11 \\ 0 & -13 & -20 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer PAP^{-1}.
4. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. Soit $a, b \in \mathbb{K}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Exprimer M en fonction de J et de I_n.
2. Calculer J^2, puis en déduire M^2 en fonction de M et de I_n.
3. Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle inversible ? Donner alors M^{-1} en fonction de M et I_n.

Indications - Solutions

Exercice 1 : On peut faire :

- $A+D, AB, DB, EA, ED \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$,
- $AC, DC \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$,
- $BC, CE \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K})$,
- $CA, CD \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})$.

Exercice 2 :

1. $AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$
2. $AB = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$
3. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -12 & -4 \\ 8 & -13 \end{pmatrix}$
4. $AB = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$
5. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

1. (a) $A^n = 0_{2,2}$ pour $n \geq 2$. (b) $A^n = I_2$ si n est pair et $A^n = A$ si n impair. (c) Par récurrence, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ (d) Par récurrence, $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(-n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$
2. (a) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B^n = 0_{3,3}$ pour $n \geq 3$.

   (b) B et I_3 commutent donc on peut appliquer Newton : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = I_3 + nB + \dfrac{n(n-1)}{2} B^2$.
3. (a) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ n2^n & 2^n & 0 \\ n(n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n+2) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1. C'est évident car les coefficients diagonaux de A et de $A^\top$ sont les mêmes.
2. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient (i,j) de $\lambda A + \mu B$ est $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$. D'où $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + \mu b_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.
3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $i \in [\![1,n]\!]$: $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$, donc $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $(A^\top A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$, donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{ki}^2$: c'est une somme de nombres positifs. Elle vaut 0 ssi tous les nombres sont nuls, c'est à dire ssi $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ki}^2 = 0$.
5. Si A et B conviennent, alors $\operatorname{tr}(AB - BA) = n$. Or $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0 \neq n$. Ce n'est pas possible, donc il n'existe aucune matrices A et B qui conviennent.

Exercice 5 :

1. Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent, alors $(AB)^\top = (BA)^\top = A^\top B^\top = AB$ car A et B sont symétriques. Donc $AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Réciproquement, si $AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, alors $AB = (AB)^\top = B^\top A^\top = BA$, donc A et B commutent.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On procède par analyse-synthèse : si $M = A + S$, avec $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, alors $M^top = -A + S$, donc $S = \dfrac{M + M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^\top}{2}$. On vérifie alors que ces deux matrices conviennent.

Exercice 6 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. $(MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = m_{ij} d_j$ et $(DM)_{ij} = d_i m_{ij}$. Ainsi, si $MD = DM \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{ij}(d_i - d_j) = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow m_{ij} = 0$. Ainsi, l'ensemble des matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

Exercice 7 :

1. $[E_{k,l} M]_{ij} = \delta_{ik} [M]_{lj}$ et $[M E_{k,l}]_{ij} = \delta_{lj} [M]_{ik}$.
2. Supposons que M vérifie la condition. En particulier, si $(k,i) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq k$ et $l \in [\![1,n]\!]$, alors $[E_{k,l} M]_{il} = 0 = [M E_{k,l}]_{kl} = [M]_{ik}$. Autrement dit M est diagonale. De plus, $[E_{k,i} M]_{ki} = [M]_{ii} = [M E_{k,i}]_{ki} = [M]_{kk}$, donc c'est une matrice scalaire. Réciproquement, on vérifie que les matrices scalaires vérifient la condition.

Exercice 8 :

1. $S=\left\{\left(\frac{3}{2},-1-z,z,-\frac{1}{2}\right),z\in\mathbb{R}\right\}=\left(\frac{3}{2},-1,0,-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Vect}((0,-1,1,0))$.
2. $S=\left\{\left(3x_3+\frac{17}{6}x_5,-x_3-\frac{5}{3}x_5,x_3,\frac{1}{6}x_5,x_5\right),x_3,x_5\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}((3,-1,1,0,0),(17,-10,-0,1,6))$.
3. $S=\varnothing$.

Exercice 9 :

1. $E=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix},a,b\in\mathbb{C}\right\}$. On calcule tout simplement le produit de deux matrices de E dans les deux sens et on voit qu'on obtient le même résultat.
2. On cherche $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ qui commute avec $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. En écrivant les deux produits, on obtient 4 équations : $\begin{cases}a+2c=a+3b\\ b+2d=2a+4b\\ 3a+4c=c+3d\\ 3b+4d=2c+4d\end{cases}$, qui donne $a=-c+d$ et $b=\frac{2}{3}c$. Ainsi, l'ensemble des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ est $\left\{\begin{pmatrix}-c+d & \frac{2}{3}c\\ c & d\end{pmatrix},c,d\in\mathbb{K}\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{3}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 10 : $D_1=28$, $D_2=-1$, $D_3=-15$ et $D_4=0$.

Exercice 11 : 1. $\det(A)=-1$ donc A inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -1 & -1\\ -5 & 1 & 1\\ -8 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 2. Pas inversible : par exemple, $C_1+C_3=2C_2$. 3. $\det(A)=-1$ et $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ 4. $\det(A)=6$ et $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ -3 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Exercice 12 : Oui, et $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 8 & -4\\ 8 & 5 & 8\\ -2 & 2 & 9\end{pmatrix}\mathrm{diag}(1/6,1/6,-1/5)=\begin{pmatrix}-5/6 & 4/3 & 4/5\\ 4/3 & 5/6 & -8/5\\ -1/3 & 1/3 & -9/5\end{pmatrix}$.

Exercice 13 :

1. On calcule $A^2=B^2=0_{2,2}$ et $A+B=I_2$ dont toutes les puissances valent I_2 et $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, qui restent inchangée en mettant à la puissance.
2. Si A était inversible, alors $(AA^{-1})^r=I_n$ et $(AA^{-1})^r=A^r(A^{-1})^r=0_{n,n}$ car A et A^{-1} commutent.
3. $(I_n-A)\sum_{k=0}^{r-1}A^k=I_n$ donc $(I_n-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{r-1}A^k$.
4. Soit $M=I_4-A$, avec $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Or $A^3=0_{4,4}$, donc A est nilpotente. Puis, $M^{-1}=I_4+A+A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 14 :

1. $A^3=-I_3$, donc $(-A^2)A=I_3$: A est inversible et $A^{-1}=-A^2$.
2. $B^3=\begin{pmatrix}4 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 4\end{pmatrix}$, $B^3=3B^2-2B$. Ainsi $B(B^2-3B-2I_3)=0_{3,3}$. Si B était inversible, on aurait $B^2-3B-2I_3=0$, ce qui n'est pas le cas. Donc B n'est pas inversible.

Exercice 15 :

1. On calcule $\det(M(t))=(t-1)(t^2+t-2)=(t-1)^2(t+2)$. Donc $M(t)$ est inversible ssi $t\notin\{1,-2\}$.
2. On calcule $M(t)^2$ et on trouve $\alpha(t)=2t+1$ et $\alpha(t)t+\beta(t)=t^2+2$, donc $\beta(t)=-t^2-t+2$.
3. Si $t=1$ ou $t=-2$, alors $\beta(t)=0$, donc $M(t)^2=\alpha(t)M(t)$ et $M(t)(M(t)-\alpha(t)I_3)=0$. Si $M(t)$ était inversible, alors $M(t)-\alpha(t)I_3=0$ donc $M(t)=\alpha(t)I_3$, ce qui n'est pas le cas. Donc $M(t)$ n'est pas inversible.
   Si $t\notin\{1,-2\}$, alors $\frac{1}{\beta(t)}M(t)(M(t)-\alpha(t)I_3)=I_3$, donc $M(t)$ est inversible.
4. Notons que $\alpha(-1)=-1$ et $\beta(-1)=2$. On construit (a_n) et (b_n) par récurrence :
   - On pose $a_0=0$ et $b_0=1$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_n$ sont déjà définis. Alors $M(-1)^{n+1}=M(-1)(a_nM(-1)+b_nI_3)=a_n(-M(-1)+2I_3)+b_nM(-1)=(-a_n+b_n)M(-1)+2a_nI_3$. On pose alors $a_{n+1}=-a_n+b_n$ et $b_{n+1}=2a_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n$ et (a_n) est bien récurrente d'ordre 2.
  On trouve l'expression de (a_n) avec la méthode du cours sur les suites : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3}$.
- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3}$, on a pour $n > 0$, $b_n = \frac{1}{3} - \frac{(-2)^{n-1}}{3}$. Ce qui donne l'expression de $M(-1)^n$ voulue.

Exercice 16 :

1. Initialisation : $(PAP^{-1})^0 = I_n$ et $PA^0P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$. Hérédité : $\left(PAP^{-1}\right)^{n+1} = PA^nP^{-1}PAP^{-1} = PA^{n+1}P^{-1}$.
2. On fait le pivot de Gauss : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $A^n = P^{-1}D^nP = P^{-1}\operatorname{diag}(1, 2^n, 3^n)P = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+2} - 6\times 3^n + 2 & 5\times 2^n - 8\times 3^n + 3 \\ 0 & 2^{n+4} - 5\times 3^{n+1} & 5\times 2^{n+2} - 20\times 3^n \\ 0 & -3\times 2^{n+2} + 4\times 3^{n+1} & -15\times 2^n + 16\times 3^n \end{pmatrix}$.

Exercice 17 :

1. $M = bJ + (a-b)I_n$.
2. $J^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ$, donc $M^2 = b^2J^2 + 2b(a-b)J + (a-b)^2I_n = (nb + 2(a-b))bJ + (a-b)^2I_n = (nb + 2a - 2b)M - ((a-b)^2 + nb(a-b))I_n$.
3. $M(-M + (nb+2a-2b)I_n) = ((a-b)^2 + nb(a-b))I_n$. Si $(a-b)^2 + nb(a-b) \neq 0$, alors M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{(a-b)^2 + nb(a-b)}(-M + (nb + 2a - 2b)I_n)$. Sinon, si M était inversible, on aurait $M = (nb + 2a - 2b)I_n$, donc forcément $b = 0$ et $a = 2a$, donc $M = 0_{n,n}$, ce qui n'est pas le cas.