Contrôle de cours 12 - Matrices - Sujet A
Mercredi 21 janvier 2026

Question 1 (4 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = 3I_3 + B$. On vérifie que $B^2 = 0_3$, donc pour tout $n \geq 2$, $B^n = 0_3$. De plus, $3I_3$ et B commutent, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (3I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_3)^{n-k} B^k$.
Pour $n \geq 1$, $A^n = 3^n I_3 + n3^{n-1} B = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & -n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, et la formule est encore vraie pour $n = 0$. □

Question 2 (2 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le déterminant de A est : $\det(A) = ad - bc$
2. La matrice A est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$
3. Si A est inversible, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Question 3 (1 pt)

Soit $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0.$
2. Si $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$. □

Question 4 (4 pts)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   On fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ pour faire apparaître un 0 en plus puis on développe :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

   La matrice A n'est pas inversible.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et on développe par rapport à la première ligne (ou colonne) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc B est inversible.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Contrôle de cours 12 - Matrices - Sujet B
Mercredi 21 janvier 2026

Question 1 (4 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = 2I_3 + B$. On vérifie que $B^2 = 0_3$, donc pour tout $n \geq 2$, $B^n = 0_3$. De plus, $2I_3$ et B commutent, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} B^k$.

Pour $n \geq 1$, $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} B = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, et la formule est encore vraie pour $n = 0$. ☐

Question 2 (2 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Le déterminant de A est : $\det(A) = ad - bc$
2. La matrice A est inversible si et seulement si : $\det(A) \neq 0$
3. Si A est inversible, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Question 3 (1 pt)

Soit $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], d_i \neq 0$.
2. Si $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$. ☐

Question 4 (4 pts)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   On fait $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et on développe par rapport à la permière ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Donc A est inversible.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1+L_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   On fait $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et on développe par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

   La matrice B n'est pas inversible. □