

**Colles 16 - 19/01/2026 au 23/01/2026**

## Thèmes traités en classe

- Chapitre 15 : Calcul matriciel.
  1. Combinaisons linéaires de matrices.
  2. Produit matriciel, puissances de matrices carrées, Newton.
  3. Matrices élémentaires.
  4. Transposée, matrices symétriques et antisymétriques.
  5. Matrices diagonales et triangulaires.
  6. Solutions d'un système, Vect.
  7. Matrices inversibles.
  8. Le déterminant (outil).
  9. Matrices d'opérations élémentaires.

**Exercices traités en classe :** 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 16.

## Questions de cours

### Question 1

- C14 Exercice II.14 : Soit  $(u_n)$  une suite numérique et  $k \in ]0, 1[$ . On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ . Montrer que  $(u_n)$  converge vers 0.
- Définition du produit matriciel : avec la formule et avec un dessin. Calcul du produit de deux matrices élémentaires avec un dessin.
- Énoncer la formule du binôme de Newton puis C15 Exercice 3 : soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- C15 Exercice 5-2 : Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- C15 Exercice 16-1 : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si une colonne de  $A$  est une combinaison linéaire des autres, alors  $A$  n'est pas inversible. Démonstration si c'est la première colonne.
- Caractérisation des matrices diagonales inversibles avec la démonstration.
- Donner le dessin des trois matrices d'opérations élémentaires. Faire un calcul de produit (matrice d'opération élémentaire)  $\times$  (une matrice quelconque) et un produit (une matrice quelconque)  $\times$  (une matrice d'opération élémentaire) (au choix pour l'opération).

### Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Produit de deux matrices élémentaires.
  - ▷ Binôme de Newton pour les matrices.
  - ▷ Propriétés de la transposée.
  - ▷ Stabilité des matrices diagonales/triangulaires par CL et produit.
  - ▷ Ensemble de solutions d'un système linéaire.
  - ▷ Condition suffisante de non inversibilité en regardant les colonnes/lignes.
  - ▷ Critère d'inversibilité en regardant un système linéaire.
  - ▷ Inversibilité des matrices de taille 2.
  - ▷ Inverse et opérations.

## A savoir faire

1. Savoir calculer un produit matriciel.
2. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
  - (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,
  - (b) en appliquant Newton.
  - (c) en utilisant  $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$ .
  - (d) Savoir tester si une matrice est inversible avec le déterminant.
  - (e) Savoir calculer l'inverse d'une matrice avec le pivot de Gauss, ou en utilisant une relation entre les puissances d'une matrice.