Contrôle de cours 13 - Continuité - Sujet A
Mercredi 28 janvier 2026

Question 1 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ un réel et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions avec des quantificateurs de :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$:
   $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell$:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a < x \leq a+\alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ ☐

Question 2 (1 pt)

Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff (\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to \ell)$ ☐

Question 3 (5 pts)

Rappeler les 11 équivalents usuels.

1. Si $a_n \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$;
2. si $a_p \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_p x^p \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$;
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
9. $(1+x)^\lambda - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x$ si $\lambda \neq 0$;
10. $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
11. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer le TVI :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux éléments de I.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$. ☐

Question 5 (1 pt)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan(3x)}$.

Comme $\tan(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\tan(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$. Donc $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x}{2}}{3x} = \dfrac{1}{6}$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\tan(3x)} = \dfrac{1}{6}$. ☐

Question 6 (1 pt)

Énoncer le TBA :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :

$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b], f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$. ☐

Question 7 (4 pts)

1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   - f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations.
   - $\forall x < 0,\ f(x) = 3x^2 - x + 1 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} 1 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0.
   - $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 1 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

   Donc f est continue en 0, et f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
   Comme $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. ☐

Question 8 (2 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier).
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. ☐ VRAI ■ FAUX
3. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\sim} 0$. ☐ VRAI ■ FAUX
4. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors f et g ont même signe au voisinage de a. ■ VRAI ☐ FAUX ☐

Contrôle de cours 13 - Continuité - Sujet B
Mercredi 28 janvier 2026

Question 1 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{I}$ un réel et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler les définitions avec des quantificateurs de :

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$:
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$:
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \mid \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell$:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, a-\alpha \leq x < a \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$ □

Question 2 (1 pt)

Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff (\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to \ell)$ □

Question 3 (5 pts)

Rappeler les 11 équivalents usuels.

1. Si $a_n \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$;
2. si $a_p \neq 0$, $a_n x^n + \cdots + a_p x^p \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$;
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
4. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
6. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;
9. $(1+x)^\lambda - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \lambda x$ si $\lambda \neq 0$;
10. $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
11. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. □

Question 4 (1 pt)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\dfrac{\arctan(5x)}{\ln(1+x)}$.

Comme $\arctan(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $5x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $\arctan(5x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$. Donc $\dfrac{\arctan(5x)}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{5x}{x} = 5$. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(5x)}{\ln(1+x)} = 5$. □

Question 5 (1 pt)

Énoncer le TVI :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a < b$ deux éléments de I.
Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$. □

Question 6 (1 pt)

Énoncer le TBA :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes :
$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b] \mid \forall x \in [a,b],\ f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$. □

Question 7 (4 pts)

1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   - f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations.
   - $\forall x < 0,\ f(x) = \sin(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x<0}]{} 0 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0.
   - $\forall x > 0,\ f(x) = x\ln(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x>0}]{} 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

   Donc f est continue en 0, et f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Comme $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. ☐

Question 8 (2 pts)

VRAI OU FAUX (sans justifier).
Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$ avec $a < b$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a \\ x>a}]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a \\ x<a}]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. ☐ VRAI ■ FAUX
2. Si $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. ☐ VRAI ■ FAUX
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$. ☐ VRAI ■ FAUX
4. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f et g ont même signe au voisinage de a. ■ VRAI ☐ FAUX ☐