

Dérivabilité - Exercices

I. Dérivabilité

Exercice I.1. On souhaite démontrer que $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. On se place pour cela dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit $h \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On note M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne h et N le point d'intersection de (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.

1. Quelles sont les aires des triangles OIM et OIN en fonction de h ?
2. Quelle est l'aire du secteur angulaire défini par l'angle h ?
3. En déduire que $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$ puis montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
4. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.
5. En utilisant les formules d'addition, montrer que $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Exercice I.2. Pour chacune des fonctions réelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable (sans se préoccuper de l'étude aux bornes).

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f_1 : x \mapsto e^x \ln(\sin(x))$; 2. $f_2 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; 3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$; | <ol style="list-style-type: none"> 4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{ 1 - x^2 }$; 5. $f_5 : x \mapsto \frac{x}{1 + x }$. |
|---|---|

Exercice I.3. 1. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$.

(b) Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, le prolongement obtenu est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Mêmes questions avec $g(x) = x^x$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice I.4. 1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. La fonction f définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, sa dérivée est-elle continue?

3. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < \alpha \\ x^2 + 12 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$
 soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée continue.

II. Rolle et accroissements finis

Exercice II.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f n'est pas périodique.

Exercice II.2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ a n solutions dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ solutions dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$. Montrer en utilisant g que l'équation $\alpha f(x) + f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ solutions réelles.
3. Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. On suppose que f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(k)}(x) = 0$ a au moins $n - k$ solutions réelles.

Exercice II.3. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$; 2. $\forall x \in]0, 1[, \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a \leq b \Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$;

Exercice II.4. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice II.5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq \lambda$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors : $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq \lambda x$.

Exercice II.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(\tan(x))$.

Exercice II.7. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$.
Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M passe par O .

On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice II.9. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n > 0$.

1. En utilisant l'IAF, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$.
2. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geq 2$.
3. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que : $\frac{1}{b} \leq \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \frac{1}{a}$.

En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

III. Dérivations successives

Exercice III.1. Calculer les dérivées n -ième des fonctions (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

1. $f(x) = x^2(1+x)^n$
2. $g(x) = x^{n-1} \ln x$
3. $h(x) = x^2 e^{-x}$

Pour h , on pourra commencer par calculer $h', h'', h^{(3)}$, puis procéder par récurrence.

Exercice III.2. 1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :
$$x \mapsto \begin{cases} 2+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? et $\mathcal{C}^2$?

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$x \mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 1 \\ e^x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
. Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$? Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^3$?

Exercice III.3. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa fonction réciproque. Justifier que argsh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer argsh' .

Exercice III.4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. On souhaite montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor-Lagrange.

1. Écrire la formule pour $n = 0$ et la démontrer.

2. Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - A(b-a)^{n+1} = 0$.

On pose $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$.

3. Justifier que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

4. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

5. En déduire la formule de Taylor-Lagrange.

IV. Applications

Exercice IV.1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de f .

(a) Étudier les variations de f .

(b) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

(c) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

(d) Justifier que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

2. Étude de (u_n) : première méthode.

(a) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) Montrer que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

(c) En déduire que (u_n) converge vers α .

3. Étude de (u_n) : deuxième méthode.

(a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$.

(b) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

(c) En déduire la limite de (u_n) .

(d) Pour quelle valeur de n le terme u_n donne une valeur approchée de α à 10^{-6} près?

Exercice IV.2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. À l'aide de l'IAF, montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice IV.3. On considère l'équation $(E) : (x-1)e^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et déterminer sa partie entière.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

(a) En étudiant la fonction $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, montrer que la suite (u_n) converge vers α .

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$.

Exercice IV.4. Étudier les suites récurrentes définies par :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2 + u_n^2}$.

3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}$.

4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{\ln(u_n) + 1}$.

Exercice IV.5. Étudier complètement les fonctions suivantes (ensemble de définition, régularité, variations, limites, prolongements éventuels, asymptotes, tracé) :

$$1. f(x) = \ln\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) \qquad 2. g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} e^{\frac{1}{x}} \qquad 3. h(x) = x^{x+1}$$

Exercice IV.6. On définit $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ et $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t - \sin t$ et $\psi(t) = 1 - \cos t$.

1. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
2. On définit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Justifier que f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire?
5. Calculer $\varphi(2\pi - \varphi^{-1}(x))$ puis $\varphi^{-1}(2\pi - x)$ et en déduire que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

V. Convexité

Exercice V.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. On suppose que f est convexe sur I .
 - (a) Montrer que pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < c < b$, on a : $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$.
On commencera par faire un dessin.
 - (b) En déduire que f' est croissante sur I .
2. On suppose que f' est croissante sur I .
 - (a) Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b)$. Justifier que g est dérivable sur $[0, 1]$ et que g' est monotone sur $[0, 1]$.
 - (b) En déduire que g est d'abord croissante puis décroissante sur $[0, 1]$.
 - (c) En déduire que f est convexe sur I .

Exercice V.2. 1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
3. Montrer que : $\forall x, y > 1, \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice V.3. Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.