

Colles 17 - 02/02/2026 au 06/02/2026

Thèmes traités en classe

- Chapitre 15 : Calcul matriciel.
Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 7, 15.
- Chapitre 16 : Continuité.
 1. Limite d'une fonction, limite à droite, limite à gauche.
 2. Caractérisation séquentielle.
 3. Opérations, limites et inégalités.
 4. Limite monotone.
 5. Comparaison de fonctions : domination, négligeabilité, équivalence.
 6. Équivalents usuels.
 7. Continuité, prolongement par continuité.
 8. Théorème des valeurs intermédiaires et corollaires.
 9. Théorème des bornes atteintes.
 10. Théorème de la bijection monotone.
 11. Fonctions à valeurs complexes.

Exercices traités en classe : I.3, II.3, III.1, III.2, III.3, III.4, III.5, III.7.

Questions de cours

Question 1

- C15 Exercice 5-2 : Toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- C15 Exercice 16-1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si une colonne de A est une combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible. Démonstration si c'est la première colonne.
- Caractérisation des matrices diagonales inversibles avec la démonstration.
- Donner le dessin des trois matrices d'opérations élémentaires. Faire un calcul de produit (matrice d'opération élémentaire) $\times$ (une matrice quelconque) et un produit (une matrice quelconque) $\times$ (une matrice d'opération élémentaire) (au choix pour l'opération).
- Application du TVI : soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- Application du TVI : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré 3. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- Donner les équivalents usuels et en démontrer quelques-uns.
- Énoncer le TVI, TBA et TBM. Expliquer le principe de la dichotomie pour la démonstration du TVI. Pour les plus motivés : faire la démonstration complète du TVI.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Produit de deux matrices élémentaires.
 - ▷ Binôme de Newton pour les matrices.
 - ▷ Propriétés de la transposée.
 - ▷ Stabilité des matrices diagonales/triangulaires par CL et produit.
 - ▷ Ensemble de solutions d'un système linéaire.
 - ▷ Condition suffisante de non inversibilité en regardant les colonnes/lignes.
 - ▷ Critère d'inversibilité en regardant un système linéaire.
 - ▷ Inversibilité des matrices de taille 2.

- ▷ Inverse et opérations.
- ▷ Unicité de la limite.
- ▷ Limite et bornitude.
- ▷ Caractérisation séquentielle de la limite.
- ▷ Limites et inégalités.
- ▷ Théorème d'encadrement.
- ▷ Limite monotone.
- ▷ Théorème des bornes atteintes.
- ▷ Théorème des valeurs intermédiaires.
- ▷ Image d'un intervalle par une fonction continue.
- ▷ Théorème de la bijection monotone.

A savoir faire

1. Savoir calculer un produit matriciel.
2. Savoir calculer les puissances d'une matrice :
 - (a) en conjecturant une formule démontrée par récurrence,
 - (b) en appliquant Newton.
 - (c) en utilisant $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.
 - (d) Savoir tester si une matrice est inversible avec le déterminant.
 - (e) Savoir calculer l'inverse d'une matrice avec le pivot de Gauss, ou en utilisant une relation entre les puissances d'une matrice.
 - (f) Savoir déterminer une limite avec un encadrement.
 - (g) Savoir manipuler les équivalents et les o .
 - (h) Savoir justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle/en un point.
 - (i) Savoir vérifier si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
 - (j) Savoir appliquer le TVI, TBA et TBM en vérifiant précisément les hypothèses.