

Continuité - Exercices

I. Limites

Exercice I.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer en utilisant les quantificateurs que :

1. $\lim_{x \rightarrow x^+} \sqrt{x} = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

Exercice I.2. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ 2. $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$ ($p, n \in \mathbb{N}^*$) 3. $a = 0$ et $f(x) = x^2 + \frac{\sqrt{x}}{x}$ 4. $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$ 5. $a = -\infty$ et $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$ 6. $a = 0$ et $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(3x)}$ 7. $a = +\infty$ et $f(x) = \arctan\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$ 8. $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ 9. $a \geq 0$ et $f(x) = \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ | <ol style="list-style-type: none"> 10. $a = 1$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ 11. $a = +\infty$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$ 12. $a = 0$ et $f(x) = \frac{x e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2 + 1}$ 13. $a = 1$ et $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ 14. $a = +\infty$ et $f(x) = x \cos x$ 15. $a = \pm\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(x^2 + e^x)}{2 + x}$ 16. $a = 0^+$ et $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 17. $a = +\infty$ et $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ |
|--|---|

Exercice I.3. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et g est bornée dans un voisinage de a , alors fg tend vers 0 en a .

II. Comparaison de fonctions

Exercice II.1. 1. Montrer que $e^{\sqrt{x}} = o_{x \rightarrow +\infty}(e^x)$.

2. On considère deux fonctions réelles f et g telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. A-t-on $e^f \underset{+\infty}{\sim} e^g$?

Exercice II.2. 1. Montrer que $\sin(\arccos x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2\sqrt{1-x}}$.

2. Déterminer un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{x+1}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f , sa limite en $+\infty$ et un équivalent de f en $+\infty$.

On rappelle (!) la formule bien connue (!) : $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice II.3. En utilisant des équivalents, déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{2x^2 + 1}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x}{x^5 - x^2 + x}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(2 - x) \tan(2x)}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x) \sin x}{x^2 + x^3}$ 5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x)$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\sin x} - 1}$ 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^x}{x}$ 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | <ol style="list-style-type: none"> 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x^2}$ 15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$ 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 - \cos x)}{x^3 + x^4}$ 18. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x}$, $n \in \mathbb{N}$ |
|---|---|--|

Exercice II.4. 1. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \rightarrow +\infty$:

$$(a) \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} \quad \Bigg| \quad (b) \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

2. Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\begin{array}{l|l|l} (a) \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2} & (c) e^x + x - 1 & (e) (\ln(1 + x))^2 - (\ln(1 - x))^2 \\ (b) \tan(x) - \sin(x) & (d) \ln(1 + \sin(x)) & \end{array}$$

III. Continuité

Exercice III.1. Étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l|l} 1. f : x \mapsto \frac{\sqrt{|1+x|}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}. & 3. f : x \mapsto \frac{x}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0. \\ 2. f : x \mapsto \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0. & 4. f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0. \end{array}$$

Exercice III.2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

Exercice III.3. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité des fonctions suivantes, puis les éventuels prolongements par continuité :

$$1. f : x \mapsto x^{x+1} \quad 2. g : x \mapsto \frac{x \ln x}{x-1} \quad 3. h : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \quad 4. j : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Exercice III.4. 1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

2. Montrer que tout polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$ a au moins une racine réelle.
3. Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer ensuite que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
4. Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $8x^7 - 7x - 1 = 0$.

Exercice III.5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution $u_n \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice III.6. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \ln(x) + nx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, f_n s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en un seul réel noté x_n .
2. (a) Pour $n \geq 1$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
(b) En déduire la monotonie de la suite (x_n) .
(c) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \geq 2$, on pose $y_n = nx_n$.
(a) Étudier la limite de (y_n) .
(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(y_n)}{y_n} = 0$.
(c) Montrer que pour $n \geq 1$, $y_n + \ln(y_n) = \ln(n)$.
(d) En déduire un équivalent de y_n , puis de x_n .

Exercice III.7 (Banque CCP-MP). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

1. (a) Démontrer que (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de x_0 , le sens de variation de (u_n) .

(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan(x))$.

Exercice III.8. Soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k -lipschitzienne si : $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. On suppose que f est k -lipschitzienne.

1. Montrer que f est continue sur I .

2. On suppose maintenant que $I = [a, b]$ et $f : I \rightarrow I$ et que $k \in]0, 1[$.

(a) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur I .

(b) On définit la suite (u_n) par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers ℓ .

Exercice III.9. 1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$ qu'on note x_n .

2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante.

3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

4. Déterminer un équivalent de (x_n) .

Exercice III.10. 1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

2. Une voiture parcourt 90km en une heure. On admet que la distance $d(t)$ parcourue par la voiture en fonction du temps t est une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30min durant lequel la voiture a parcouru exactement 45km.

On pourra considérer la fonction $f(t) = d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t)$.

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1 - 1/n], f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice III.11. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , qui ne s'annulent pas et qui vérifient : $\forall x \in I, f^2(x) = g^2(x)$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice III.12. 1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b], f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b], f(x) \geq m$.

2. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b], f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b], f(x) \geq g(x) + m$.

Exercice III.13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice III.14. 1. Montrer qu'une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un contre-exemple si la fonction est seulement périodique, ou seulement continue.

Exercice III.15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice III.16. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice III.17. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice III.18. On cherche les applications $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues et telles que $f(0) = 0, f(1) = 1$ et pour tout $x \in [0, 1], f \circ f(x) = x$.

1. Montrer qu'une telle application est injective. En déduire que f est strictement croissante.

2. En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout $x \in [0, 1], f(x) = x$.

Exercice III.19. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'image de tout rationnel soit irrationnelle et que l'image de tout irrationnel soit rationnelle.

On raisonne pour cela par l'absurde et on suppose qu'il existe une telle fonction f .

En considérant la fonction $g(x) = f(x) + x$, aboutir à une contradiction.

Exercice III.20. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b], f(x) = g(x').$$

On veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que pour tout $x \in [a, b], f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer que la fonction $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas sur $[a, b]$.
2. On suppose que $f - g > 0$.
 - (a) Montrer que f et g possède chacune un maximum sur $[a, b]$ notés respectivement M_f et M_g .
 - (b) Montrer que $M_g \geq M_f$ puis conclure.
3. Traiter le cas $f - g < 0$.

Exercice III.21. 1. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On procède par analyse-synthèse.

- (a) Analyse : prenons f qui convient.
 - i. Montrer que f est impaire.
 - ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
 - iii. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
 - iv. En déduire que f est une fonction linéaire.
 - (b) Synthèse : à vous de jouer.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$.

Exercice III.22. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice III.23. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. On suppose que I n'est pas réduit à un point.

1. Soit $a < b$ deux éléments de I . On suppose que $f(a) < f(b)$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, $f(a) < f(x) < f(b)$.
 - (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[a, b]$.
 - (c) Que peut-on dire de f si $f(a) > f(b)$?
2. Soit $a < b$ deux éléments de I . On suppose que $f(a) < f(b)$ et soit $x < y$ deux autres éléments de I . On pose $c = \min(a, x)$ et $d = \max(b, y)$.
 - (a) Justifier que $c \leq a < b \leq d$ et en déduire que f est strictement croissante sur $[c, d]$.
 - (b) En déduire que $f(x) < f(y)$.
3. Montrer que f est strictement monotone sur I .

Exercice III.24. 1. Démontrer le théorème de la limite monotone.

2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est continue.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\alpha = \varepsilon^2 > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon$.
2. Soit $B \in \mathbb{R}_+$. Posons $A = B^{\frac{1}{n}}$. Alors pour tout $x \geq A$, $x^n \geq A^n = B$.
3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Posons $\alpha = \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}$. Alors pour tout x tel que $0 < x \leq \alpha$, $\frac{1}{x^n} \geq \frac{1}{\alpha^n} = A$.

Exercice I.2 :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$ 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{na^n}{pa^p}$ (attention si $a = 0$ et $p > n$!) 3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{11}{2}$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$ 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$ 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ | <ol style="list-style-type: none"> 9. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2\sqrt{a}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ 12. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ 13. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ 14. $f(n\pi) = (-1)^n n\pi$ qui ne converge pas. 15. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ 16. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ |
|--|--|

Exercice I.3 : Si a est fini : il existe $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, $|g(x)| \leq M$, donc $|(fg)(x)| \leq M|f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Donc $(fg)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ par encadrement. Si $a = \pm\infty$, on procède de même mais en changeant le voisinage.

Exercice II.1 :

1. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} = e^{\sqrt{x}-x} = e^{x(-1+\frac{1}{\sqrt{x}})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Non : $x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $e^{x+1} \not\underset{+\infty}{\sim} e^{x+1}$.

Exercice II.2 :

1. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.
2. Comme $\arccos x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, $\sin(\arccos x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \arccos x$.
3. $D_f = [-1/2, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{x+1}} = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$.

Exercice II.3 :

- | | | |
|---|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{2x^2+1} = +\infty$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+2x}{x^5-x^2+x} = 2$ 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)} = \frac{1}{8}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = 1$ 5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \tan(2x) = -2$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3$ 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = 0$ 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-e^{3x}}{x} = 2$ 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{\sin x}-1} = 1$ 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x-2^x}{x} = \ln \frac{5}{2}$ 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ | <ol style="list-style-type: none"> 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x^2} = 1$ 15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = 3$ 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} = 2$ 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+x^4} = \frac{1}{2}$ 18. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} = (-1)^n(n+1)$ |
|---|---|--|

Exercice II.4 :

1. (a) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} = x(\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2})$. Or $\sqrt{1+1/x^2} + \sqrt{1-1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$, donc $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$.
 (b) La méthode précédente mène à un équivalent à 0!! On utilise la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$.

III. Continuité

2. (a) On utilise la quantité conjuguée : $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x^2}{2} = x^2$.
On peut aussi utiliser $\sqrt{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
- (b) $\tan(x) - \sin(x) = \sin(x) \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3}$.
- (c) $e^x - 1 + x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) = 2x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$.
- (d) $\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
- (e) $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 = (\ln(1+x) + \ln(1-x))(\ln(1+x) - \ln(1-x))$. Or $\ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) = 2x + o(x)$, et $\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln((1+x)(1-x)) = \ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$. Donc $(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x \times (-x^2) = -2x^3$.

Exercice III.1 :

- Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue par opérations et composition de fonctions usuelles. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc f est continue en 0.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, donc f n'est pas continue en 0.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice III.2 :

- $D_f = [-4, 0[\cup]0, +\infty[$.
- f est continue par opérations et composition de fonctions continues.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 8$.

Exercice III.3 :

- $D_f = \mathbb{R}_+^*$, continue sur D_f , prolongeable en 0 par $f(0) = 0$.
- $D_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$, continue sur D_g , prolongeable en 1 par $g(1) = 1$ et en 0 par $g(0) = 0$.
- $D_h = \mathbb{R}^*$, continue sur D_h , prolongeable en 0 par $h(0) = 1$.
- $D_j = \mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1/k, k \in \mathbb{Z}\}$, prolongeable en 0 par $j(0) = 1$.

Exercice III.4 :

- Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f prend au moins une valeur négative et une valeur positive. D'après le TVI, elle prend aussi la valeur 0.
- Un polynôme de degré impair vérifie les hypothèses de la question précédente.
- On pose $f(x) = x^3 + 5x - 1$. $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$, donc f est injective. L'équation $f(x) = 0$ a donc au plus une équation, et d'après la question précédente elle en a une. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1/2) = 13/8 > 0$, donc la solution est entre 0 et 1/2.
- On pose $f(x) = 8x^7 - 7x - 1$. $f'(x) = 56x^6 - 7 = 0 \iff x = \pm(7/56)^{1/6}$. On vérifie ensuite que $f(-(7/56)^{1/6}) > 0$ et $f((7/56)^{1/6}) < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc on a trois solutions réelles.

Exercice III.5 :

- $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n = \frac{ne^{2x} + (2n-1)e^x + n}{1+e^x} > 0$, donc $f_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$.
- Voir exercice III.4.
- $f_n(0) = \frac{1}{2}$ et $f_n(-1/n) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice III.6 :

- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'_n(x) = \frac{1}{x} + n > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ (par croissances comparées), d'après le TBM, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
- (a) Pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x_n) = \ln(x_n) + nx_n + x_n = x_n > 0$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f_{n+1} est strictement croissante et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$, on a $x_n > x_{n+1}$: Donc (x_n) est strictement décroissante.
(c) La suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers ℓ . Si $\ell \neq 0$, alors comme $0 = \ln(x_n) + nx_n \rightarrow +\infty$, donc on a une contradiction. D'où $\ell = 0$.
- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - \ln(x_n) \rightarrow +\infty$.
(b) $\lim \frac{\ln(y_n)}{y_n} = 0$ par croissances comparées.
(c) Pour $n \geq 1$, $y_n + \ln(y_n) = nx_n + \ln(x_n) + \ln(n) = f_n(x_n) + \ln(n) = \ln(n)$.
(d) En divisant par y_n : $1 + \frac{\ln(y_n)}{y_n} = \frac{\ln(n)}{y_n} \rightarrow 1$, donc $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. Puis, $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice III.7 :

- En étudiant la fonction $x \mapsto \arctan(x) - x$, on a $u_1 = \arctan(x_0) > u_0 = x_0$ ssi $x_0 < 0$. On montre alors par récurrence sur n que si $x_0 < 0$, alors (u_n) est décroissante et sinon elle est croissante. On utilise que la fonction $\arctan$ est croissante dans l'hérédité.
 - On montre facilement par récurrence que u_n est majorée par $\frac{\pi}{2}$ et minorée par $-\frac{\pi}{2}$. Comme la suite est monotone, elle converge vers ℓ qui vérifie $\arctan(\ell) = \ell \iff \ell = 0$.
- On procède par analyse-synthèse. Si h est solution, alors on prend $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit comme avant la suite (u_n) . On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(x_0) = h(u_n)$. En prenant la limite, $h(x_0) = h(0)$. Autrement dit, h est constante. On vérifie ensuite que les fonctions constantes sont solutions du problème.

Exercice III.8 :

- Soit $x \in I$. Pour tout $y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Or $|x - y| \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$, donc par encadrement, $f(y) \xrightarrow{y \rightarrow x} f(x)$ et f est continue en x .
- On pose $g(x) = f(x) - x$, qui est continue sur $[a, b]$. Comme $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$, il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $g(\ell) = 0$, donc ℓ est un point fixe de f . Supposons que $\ell' \in [a, b]$ vérifie $f(\ell') = \ell'$. Alors $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$. Comme $k < 1$, on a forcément $\ell = \ell'$. Donc le point fixe est unique.
 - On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Comme $k \in]0, 1[$, $|u_n - \ell| \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow \ell$.

Exercice III.9 :

- On pose $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$. C'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \leq 0$ pour $x \in [0, 1]$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, avec $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = -n + 1 < 0$ car $n \geq 2$. Donc $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $[0, 1]$ d'après le TVI strictement croissant.
- Pour $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - nx_n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - 1 - x_n^n - x_n + 1 = x_n^{n+1} - x_n^n - x_n$. Comme $x_n \in [0, 1]$, $x_n^{n+1} \leq x_n^n$, donc $f_n(x_n) < 0$. Comme f_n est strictement décroissante et $f_n(x_{n+1}) = 0$, on a $x_n > x_{n+1}$. La suite est décroissante.
- (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers ℓ . Si $\ell \neq 0$, alors $0 = x_n^n - nx_n + 1 \rightarrow -\infty$, ce qui est une contradiction. Donc $\ell = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nx_n = 1 + x_n^n \rightarrow 1$, donc $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice III.10 :

- On pose $g(x) = f(x) - x$. C'est une fonction continue et $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Puis on utilise le TVI.
- $f(0) = d(1/2)$ et $f(1) = d(1) - d(1/2)$, donc $f(0) + f(1) = 90$. Ainsi, on a soit $f(0) \leq 45$ et $f(1) \geq 45$ ou $f(0) \geq 45$ et $f(1) \leq 45$. Dans les deux cas, on peut appliquer le TVI.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$ pour $x \in [0, 1 - 1/n]$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. De plus, $\sum_{k=1}^{n-1} g(k/n) = f(1) - f(0) = 0$ (télescopage). Donc il existe $k, \ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tels que $g(k) \geq 0$ et $g(\ell) \leq 0$. Puis on applique le TVI.

Exercice III.11 : Comme f et g ne s'annulent pas et sont continues, elles ont toujours le même signe. Si f et g ont le même signe, $f = g$, sinon $f = -g$. Ou bien on raisonne par l'absurde.

Exercice III.12 :

- f est minorée sur $[a, b]$. On prend m son minimum.
- On applique la question précédente à $f(x) - g(x)$.

Exercice III.13 : Comme f est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) \leq M$ et $f \circ g$ est bornée. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier, g est continue sur $[-M, M]$ et donc bornée sur ce segment. Il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [-M, M], |g(x)| \leq N$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-M, M]$, puis $|g(f(x))| \leq M$ et $g \circ f$ est bornée.

Exercice III.14 :

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, périodique de période T . Alors $f|_{[0, T]}$ est une fonction continue sur un segment : elle est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, T], |f(x)| \leq M$. Puis, si $x \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + nT \in [0, T]$, donc $|f(x)| = |f(x + nT)| \leq M$. La fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.
- Si la fonction est seulement continue, on peut prendre $x \mapsto x$ qui n'est pas bornée. Si elle est seulement périodique, on peut prendre f 1-périodique définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice III.15 : $|f|$ admet aussi des limites finies en $\pm\infty$. Notons $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \ell_+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \ell_-$. Alors il existe $A < B$ tels que $\forall x \leq A, |f(x)| \leq \ell_- + 1$ et $\forall x \geq B, |f(x)| \leq \ell_+ + 1$. Puis il existe M tel que $\forall x \in [A, B], |f(x)| \leq M$. Ainsi, $|f|$ est majorée par $\max(M, \ell_+ + 1, \ell_- + 1)$.

Exercice III.16 : Posons $M = f(0)$. Il existe $A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$. Puis sur l'intervalle $[-A, A]$, la fonction f est minorée et atteint son minimum en x_0 . Alors : $\forall x \in [-A, A], f(x) \geq f(x_0)$ et $\forall x \notin [-A, A], f(x) \geq M = f(0) \geq f(x_0)$.

Exercice III.17 : On commence par montrer par récurrence que $f(2^{-n}x) = f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = f(0)$ par continuité de f en 0. Mais aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2^{-n}x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x)$. Donc $f(x) = f(0)$.

Exercice III.18 :

1. Si $f(x) = f(x')$, alors $f(f(x)) = f(f(x'))$, donc $x = x'$. Il y a un théorème qui dit que si $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et injective alors elle est strictement monotone, mais il n'est pas au programme!
Prenons $0 \leq x < y < 1$. Comme f est injective, $0 \leq f(x) \neq f(y) \leq 1$. Supposons par l'absurde que $f(x) > f(y)$. Alors $f(y) \in [f(0), f(x)]$, donc il existe $c \in [0, x]$ tel que $f(c) = f(y)$. Or $y \notin [0, x]$, donc $y \neq c$, ce qui contredit l'injectivité de f ! Donc $f(x) < f(y)$ et f est strictement croissante.
2. Supposons que $f(x) \neq x$. Si $f(x) > x$, alors $f(f(x)) > f(x)$, donc $x > f(x)$, contradiction. De même si $f(x) < x$, on trouve $f(x) > x$.

Exercice III.19 : La fonction g est continue. De plus, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) \notin \mathbb{Q}$, donc $g(x) \notin \mathbb{Q}$. Et si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) \in \mathbb{Q}$, donc $g(x) \notin \mathbb{Q}$. Dans les deux cas, $g(x)$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que g n'est pas constante, alors elle prend deux valeurs irrationnelles. Mais entre celles-ci il y a un rationnel. Par TVI, il existe alors une valeur de x pour laquelle $g(x) \in \mathbb{Q}$, ce qui est une contradiction. Ainsi g est constante, ce qui est une contradiction.

Exercice III.20 :

1. La fonction $f - g$ est continue sur $[a, b]$ et ne s'annule pas. D'après le TVI elle est donc soit toujours strictement positive, soit toujours strictement négative.
2. (a) C'est le TBM.
(b) Comme M_f est le maximum de f , il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = M_f$. Par hypothèse, il existe donc $x' \in [a, b]$ tel que $g(x') = M_f$. Mais $g(x') \leq M_g$, donc $M_f \leq M_g$.
Prenons $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = M_g$. Alors $f(c) - g(c) > 0$, mais $f(c) - g(c) = f(c) - M_g \leq M_f - M_g \leq 0$, ce qui donne une contradiction.
3. On applique la question 2 à la fonction $g - f$.

Exercice III.21 :

1. (a) i. On prend $x = y = 0$ et on trouve $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. Puis on prend $y = -x$ et on trouve $f(x) + f(-x) = 0$.
ii. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Puis on utilise l'impairité.
iii. Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $qf(p/q) = f(q \times p/q) = f(p) = pf(1)$. Donc $f(p/q) = p/qf(1)$.
iv. Si $x \in \mathbb{R}$, on prend une suite de rationnels (r_n) qui tend vers x . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_nf(1)$ et à la limite, $f(x) = xf(1)$.
(b) Si $f : x \mapsto ax$, alors f vérifie bien le problème donné.
2. On procède de nouveau par analyse-synthèse. Pour l'analyse, on voit que si f s'annule en x , alors f est nulle partout. On suppose que la fonction n'est pas la fonction nulle, donc f ne s'annule jamais. On commence par $f(0) = 1$ en prenant $x = y = 0$. Donc f est strictement positive. Puis, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = f(x)^n$. Puis pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(p/q)^q = f(p) = f(1)^p$, donc $f(p/q) = f(1)^{p/q}$ car f est strictement positive. Pour $x \in \mathbb{R}$, on prend une suite de rationnels (r_n) avec $r_n \rightarrow x$. Alors $f(r_n) = f(1)^{r_n}$ et à la limite : $f(x) = f(1)^x$. Donc f est une exponentielle. On vérifie ensuite que la fonction nulle convient et si $a > 0$, $f(x) = a^x$ convient aussi.

Exercice III.22 :

- Injectivité : soit $x, x' \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x'$. Si $x, x' \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x - 1 \neq x' - 1 = f(x')$. Si $x, x' \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x + 1 \neq x' + 1 = f(x')$. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x' \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x - 1 \in \mathbb{Q}$ et $f(x') = x' + 1 \notin \mathbb{Q}$. Donc $f(x) \neq f(x')$. Le dernier cas se traite de même. Donc f est bien injective.
- Surectivité : soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y \in \mathbb{Q}$, alors $y + 1 \in \mathbb{Q}$ et $f(y + 1) = y$. Si $y \notin \mathbb{Q}$, alors $y - 1 \notin \mathbb{Q}$ et $f(y - 1) = y$. Dans les deux cas, y admet un antécédent, donc f est surjective.
- Continuité : Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe (x_n) une suite d'irrationnels tels que $x_n \rightarrow x$. Donc $f(x_n) = x_n + 1 \rightarrow x + 1 \neq f(x)$ et f n'est pas continue en x . De même si $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice III.23 :

1. (a) Soit $x \in]a, b[$. Supposons par l'absurde que $f(x) \notin]f(a), f(b)[$. On a soit $f(x) < f(a)$, mais alors $f(a) \in [f(x), f(b)]$ et il existe $y \in [x, b]$ tel que $f(a) = f(y)$ ce qui contredit l'injectivité, soit $f(x) > f(b)$ et $f(b) \in [f(a), f(x)]$ et il existe $y \in [a, x]$ tel que $f(y) = f(b)$ ce qui est aussi en contradiction avec l'injectivité de f .
(b) Soit $x < y$ dans $[a, b]$. D'après la question précédente, $f(x) < f(b)$. En réappliquant la question précédente sur $[x, b]$ avec $y \in]x, b[$, on a $f(x) < f(y) < f(b)$. Donc f est bien strictement croissante sur $[a, b]$.
(c) On peut prendre $g = -f$ qui est encore continue et injective. Elle vérifie $g(a) < g(b)$, donc est strictement croissante sur $[a, b]$. Puis f est strictement décroissante sur $[a, b]$.
2. (a) $c = \min(a, b) \leq a$ et $b \leq \max(b, y)$ par définition. Comme $a < b$, $c \leq a < b \leq d$. Comme f est injective, on a soit $f(c) < f(d)$, soit $f(c) > f(d)$. Dans le deuxième cas, f est strictement décroissante sur $[c, d]$, et $f(a) > f(b)$ ce qui est une contradiction. Donc $f(c) < f(d)$ puis f est strictement croissante sur $[c, d]$.
(b) Comme $x, y \in [c, d]$, $f(x) < f(y)$.
3. Soit $a < b$ deux éléments de I .
 - Si $f(a) < f(b)$, alors d'après la question précédente, pour tout $x < y$ dans I , $f(x) < f(y)$, donc f est strictement croissante sur I .
 - Si $f(a) > f(b)$, alors $-f(a) < -f(b)$ et d'après la question précédente, pour tout $x < y$ dans I , $-f(x) < -f(y)$, donc f est strictement décroissante sur I .

Correction de l'exercice III.24 :

1. On considère le cas où f est croissante. On prend $c \in I$ qui n'est pas sur le bord de I . L'ensemble $E = \{f(x), \text{ avec } x < c\}$ est non vide et majoré par $f(c)$. Il admet une borne supérieure qu'on note M . Montrons que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E . Il existe $x_0 < c$ tel que $f(x_0) > M - \varepsilon$. On pose $\alpha = c - x_0 > 0$. Comme f est croissante, $\forall x \in I$, si $x_0 \leq x < c$, $f(x_0) \leq f(x) \leq M$. Autrement dit, $\forall x \in I$, $|c - x| \leq \alpha$ et $x < c \Rightarrow M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$. Donc f tend vers M lorsque x tend vers c par valeurs inférieures. Comme $\forall x < c$, $f(x) \leq f(c)$, en passant à la limite, $M \leq f(c)$.

On adapte pour la limite à droite, et pour les bornes de I .

Pour le cas f décroissante, on considère $-f$ qui est croissante.

2. Soit $c \in I$ qui n'est pas une borne de I . Montrons que f est continue en c . Comme f est monotone, elle admet une limite à gauche ℓ_- et à droite ℓ_+ en c . Supposons par exemple que f est croissante, alors $\ell_- \leq f(c) \leq \ell_+$. Il nous suffit de prouver que $\ell_+ = f(c) = \ell_-$.

Supposons par l'absurde que $\ell_- < f(c)$. Comme c n'est pas une borne, il existe $a < c$ dans I . Comme f est croissante, $f(a) \leq \ell_- < f(c)$. Comme $f(I)$ est un intervalle $\ell_- \in [f(a), f(c)] \subset f(I)$. En particulier, $\frac{f(c) + \ell_-}{2}$ est dans $f(I)$: il existe $d \in I$ tel que $\ell_- < f(d) = \frac{f(c) + \ell_-}{2} < f(c)$. Comme f est croissante, $d < c$. Mais alors $d \leq \ell_-$, ce qui est absurde. On raisonne de même pour ℓ_+ .