

Polynômes - Exercices

I. Généralités

Exercice I.1. On donne le polynôme $P = (X^2 - 1)^{2n}$.

1. Donner le coefficient du monôme de degré $2n$ de P .
2. Si $A = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ et $B = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$, quel est le coefficient du monôme de degré p de $A \times B$?
3. On pose $A = (X - 1)^{2n}$ et $B = (X + 1)^{2n}$. En remarquant que $P = A \times B$, en déduire un autre calcul du coefficient du monôme de degré $2n$ de P .
4. Déduire des questions précédentes la relation : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

Exercice I.2. Soit $P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Exercice I.3.

1. On souhaite résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - (a) Soit P une solution et n son degré. Calculer n .
 - (b) En déduire les solutions de l'équation.
2. En procédant de la même façon, déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

II. Division euclidienne

Exercice II.1. Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de A par B :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $A = X^3 + 2X^2 + X - 1$ et $B = X - 2$ 2. $A = X^4 + X^3 - X + 5$ et $B = X^2 + 1$ 3. $A = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + X^2$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ et $B = X^2 + (1 - i)X + 1 + i$. |
|--|---|

Exercice II.2.

1. Déterminer a et b pour que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.
2. Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice II.3.

1. Montrer que $(X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est divisible par $X(X + 1)(2X + 1)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ par $X^2 - 1$.
3. On pose $P = X^{n+1} - 2X^n + X + 1$ et $B = (X - 1)(X - 2)$.
 - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par B .
 - (b) Déterminer le quotient de cette division euclidienne.

Exercice II.4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)$ est 6, et que le reste de la division de P par $(X - 2)$ est 8. Quel est le reste de la division par $(X - 1)(X - 2)$?
2. *Généralisation.* Si $a \neq b$, donner le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice II.5. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

III. Racines

Exercice III.1.

1. Montrer très simplement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
2. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(X+1)^n - nX - 1$ par X^2 .

Exercice III.2. On considère le polynôme $P = X^6 - X^5 - 2X^4 - X^3 + X^2 + 2X - 1$. On souhaite calculer $P(1 + \sqrt{2})$.

1. Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1 + \sqrt{2}$ est racine.
2. En déduire une manière simple de calculer $P(1 + \sqrt{2})$.

Exercice III.3. Démontrer que les polynômes suivants n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$:

- a) $1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ b) $1 - X + X^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice III.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $P = (X-2)^n - (2X-3)^n + \lambda(X^n - 1)$.

Trouver l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels P admet 1 comme racine au moins double. Déterminer alors l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice III.5. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0_2$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Calculer M^n pour tout $n > 0$.

Exercice III.6. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. Montrer, sans développer, que le polynôme

$$P = (b-c)(X-a)^2 + (c-a)(X-b)^2 + (a-b)(X-c)^2 + (a-b)(b-c)(c-a)$$

est le polynôme nul.

Exercice III.7. 1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = Q(X+1)$.

- (a) Si α est une racine de Q , que dire de $\alpha + 1$?
- (b) En déduire que Q est constant.

2. On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

- (a) Soit P un tel polynôme. Montrer que 0 est racine de P .
- (b) En déduire trois autres racines de P .
- (c) Montrer que P peut s'écrire $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice III.8. 1. Soit $P = (X-2)(X-1)(X+1)(X+2)$. Montrer que P' a trois racines distinctes qui sont toutes réelles.

2. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ dans un intervalle $]a, b[$.

- (a) Montrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes dans l'intervalle $]a, b[$.
- (b) Montrer par l'absurde que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

3. On suppose maintenant que P a k racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Montrer que P' a au moins $m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1$ racines réelles comptées avec multiplicités.

4. Soient p et q deux réels. On pose $P = X^6 + pX + q$ et $Q = X^5 + pX + q$.

Montrer que P ne peut pas avoir plus de deux racines réelles distinctes et Q ne peut pas avoir plus de trois racines réelles distinctes.

5. Montrer que le polynôme $P = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ est de degré n et a n racines réelles distinctes strictement comprises entre -1 et 1 .

IV. Factorisations

Exercice IV.1.

1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. En déduire la relation (à retenir) : $1 + j + j^2 = 0$.
2. Soit $n \geq 2$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(a) Utiliser une méthode semblable à celle de la question 1 pour montrer que :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$$

(b) Montrer aussi que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k) = n$.

(c) Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $|1 - \xi^k|$.

(d) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3. Soit $n \geq 0$. Factoriser le polynôme $X^{2n+1} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis en déduire que $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Exercice IV.2. Factoriser en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$:

- | | | |
|--------------|----------------------------------|--------------------------|
| 1. $X^5 - 1$ | 3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$ | 5. $X^3 - X^2 - 8X + 12$ |
| 2. $X^6 + 1$ | 4. $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ | 6. $X^6 - X^3 + 1$. |

Exercice IV.3. Soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P , puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice IV.4. Soit $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Sachant que la somme de deux des racines de P est égale à la troisième, factoriser P .

Exercice IV.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, \pi[$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$.

Exercice IV.6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Exercice IV.7. Soit $P = X^3 - X + 1$.

1. Justifier que P a trois racines simples que l'on notera a , b et c .
2. Déterminer la valeur de $ab + ac + bc$.
3. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.
4. En déduire $a^7 + b^7 + c^7$.

Exercice IV.8. [Polynômes de Tchebychev]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$$

2. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n , T_{n-1} et T_{n-2} .
3. Calculer T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
5. Trouver les racines de T_n qui sont dans $[-1, 1]$.
6. Factoriser T_n .
7. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

V. Décompositions en éléments simples

Exercice V.1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire scindé à racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer $P'(\alpha_k)$ en fonction des autres racines de P .
2. En déduire l'expression des coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ à l'aide de P' .

Exercice V.2. 1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

- (a) $\frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$
- (b) $\frac{2X^5 - 11X^4 + 13X^3 + 17X^2 - 39X - 18}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}$
- (c) $\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

- (a) $\frac{1}{X(X^2 + 1)}$ | (b) $\frac{1}{X(X^n - 1)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 3}{X^3 + X^2 - X - 1}$ sous la forme $P + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{(X+1)^2}$.

4. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X^2 + 1)}$ sous la forme $P + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 1}$.

Exercice V.3. 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Simplifier les sommes :

- (a) $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ | (b) $R_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3 - k + 1}{k^3 - k}$ | (c) $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{(k^2 - 1)(k^2 - 4)}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3 - 2x + x - 4}{x^2 - x - 2} dx$.

Exercice V.4. 1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

2. Soit $n \geq 2$. En déduire la valeur de $\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1 - \omega}$.