

Chapitre 17 : Dérivabilité

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

I. Dérivation

I.1. Dérivabilité en un point

Définition I.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \neq x \in I$.

- Le **taux d'accroissement** de f entre a et x est la quantité

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

- On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement admet une limite finie lorsque x tend vers a . Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarques I.1. • Si $d(t)$ est la distance parcourue par un mobile en fonction du temps, alors $d'(t_0)$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 .

- Dans la définition, on passe d'une limite à l'autre en posant $x = a + h$: lorsque $h \rightarrow 0$, on a bien $x \rightarrow a$.
- Le taux d'accroissement de f entre a et x est le rapport entre l'accroissement des ordonnées Δy et des abscisses Δx . C'est la pente de la droite qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Le nombre dérivé, lorsqu'il existe, est la limite des coefficients directeurs des droites précédentes lorsque x tend vers a : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ qui est la notation de Leibniz.

Définition I.2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a , la **droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a** est la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

C'est la droite de pente $f'(a)$ qui passe par le point $(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$.

Remarque I.2. La droite tangente est la droite « limite » des sécantes à la courbe. Lorsque cette droite limite est verticale, la fonction n'est pas dérivable et la limite des taux d'accroissement vaut $\pm\infty$.

Comme le montre la proposition suivante, la droite tangente et la courbe $\mathcal{C}_f$ se « confondent » au voisinage de a .

Proposition I.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors f est dérivable en a ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \lambda(x - a) + o(x - a).$$

De plus, si f est dérivable, $\lambda = f'(a)$ et on dit que f admet un **développement limité à l'ordre 1 en a** .

Proposition I.2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a , alors elle est continue en a .

Remarque I.3. Attention : la réciproque est fausse. En effet, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

Définition I.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ à l'intérieur de I . On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a . On note alors $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) la dérivée à droite (resp. à gauche) en a .

Proposition I.3. La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Remarque I.4. Lorsque f est dérivable à gauche et à droite en a , $\mathcal{C}_f$ admet deux « demi-tangentes » au point d'abscisse a . Si les valeurs des dérivées ne coïncident pas, alors la courbe a un point anguleux.

Définition I.4. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f , et se note f' , ou encore $\frac{df}{dx}$.

I.2. Opérations sur les dérivées

Proposition I.4 (Linéarité de la dérivée). Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ est dérivable en a et $(\lambda u + \mu v)'(a) = \lambda u'(a) + \mu v'(a)$.

Proposition I.5. Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en a . Alors :

- la fonction uv est dérivable en a et $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$;
- si $u(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{u}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{u}\right)'(a) = -\frac{u'(a)}{u^2(a)}$;
- si $v(a) \neq 0$ alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$.

I.3. Dérivée des fonctions composées

Proposition I.6. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Remarque I.5. En utilisant la notation de Leibniz : $y = f(x)$ et $z = g(y)$, on obtient $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, $g'(y) = \frac{dz}{dy}$ et $(g \circ f)'(x) = \frac{dz}{dx}$, donc $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$.

I.4. Dérivée des réciproques

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et bijective. Soit $g : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque. Prenons $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$.

Proposition I.7. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable en y_0 et $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
De plus, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en y_0 est symétrique à la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 .

Remarque I.6. On peut aussi écrire $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

II. Théorèmes fondamentaux

II.1. Extrema d'une fonction

Définition II.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f admet :

- un maximum local en a si : $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(a)$;
- un minimum local en a si : $\exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

Proposition II.1. Soit a à l'intérieur de I . Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Définition II.2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. On dit que a est un **point critique** de f si $f'(a) = 0$.

Remarques II.1. • Attention, la réciproque est fautive : la fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

- Si a est une borne de I , on n'a pas forcément $f'(a) = 0$. Par exemple, $f(x) = x$ définie sur $[0, 1]$ admet un maximum local en 1, mais $f'(1) = 1 \neq 0$.
- Si f est continue et dérivable sur $I = [a, b]$, alors on sait qu'elle est bornée et atteint ses bornes. Pour déterminer $\sup_{[a,b]} f$ et $\inf_{[a,b]} f$, il suffit de comparer les valeurs de f aux points où f' s'annule et en a et en b .

II.2. Théorème de Rolle

Théorème II.2 (Théorème de Rolle)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

II.3. Théorème des accroissements finis

Théorème II.3 (Théorème des accroissements finis)

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque II.2. Le théorème affirme qu'il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ qui est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Cette droite a pour équation $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$.

Le théorème de Rolle est un cas particulier du TAF car la droite est horizontale.

Théorème II.4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) = 0$.

Remarque II.3. En particulier, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Proposition II.5 (Caractérisation de la stricte monotonie). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et l'ensemble $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non trivial.

Remarque II.4. En général, on utilise que si f' est strictement positive (resp. négative) sur I sauf en un nombre fini de points de I alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .

Théorème II.6 (Limite de la dérivée)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. S'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Si de plus, ℓ est un réel, alors f est dérivable sur I , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

Si $\ell = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en a .

Remarque II.5. • Si f est de plus $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est $\mathcal{C}^1$ sur I .

- Attention, f peut être continue et dérivable sur I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ sans être de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Par exemple $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ avec $f(0) = 0$.

II.4. Inégalité des accroissements finis

Corollaire II.7 (Inégalité des accroissements finis). Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. S'il existe m et M tels que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors : $\forall x, y \in [a, b]$, avec $x \neq y$, $m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$.
2. S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$ alors : $\forall x, y \in [a, b]$, $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$.

Définition II.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $K \geq 0$. On dit que f est K -lipschitzienne sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Remarque II.6. Soit $f : I \rightarrow I$ une fonction K -lipschitzienne. On suppose que $K \in [0, 1[$ et $\ell \in I$ est un point fixe de f . Si on considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on trouve $|u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$. Comme $K \in [0, 1[$, on a donc $u_n \rightarrow \ell$.

Proposition II.8. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si f est K -lipschitzienne sur I , alors f est continue sur I .
2. Si f est dérivable sur I et f' est bornée sur I par une constante $M \geq 0$, alors f est M -lipschitzienne sur I .

Remarque II.7. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ est lipschitzienne car sa dérivée est continue sur un segment donc bornée.

III. Dérivées successives

III.1. $\mathcal{C}^n$

Définition III.1. Soit f une fonction définie sur I .

- Si f est dérivable sur I , on note f' sa dérivée.
- Si f' est dérivable sur I , on note f'' sa dérivée. C'est la **dérivée seconde** de f .
- Par récurrence, on définit la **dérivée n -ième** de f notée $f^{(n)}$ ou encore $\frac{d^n f}{dx^n}$: si $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ existent sur I et $f^{(n-1)}$ est dérivable, alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^n$** sur l'intervalle I si f admet une dérivée n -ième qui est en plus continue. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . C'est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Remarque III.1. Attention, une dérivée n'est pas forcément continue. Par exemple $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée en 0 par $f(0) = 0$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'est pas continue.

Définition III.2. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples III.1. Les fonctions polynomiales, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Proposition III.1. Une combinaison linéaire, un produit, un quotient bien défini, une composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$. De plus, si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (formule de Leibniz).

Remarque III.2. Il n'y a pas de formule pour la dérivée n -ième d'une composée.

III.2. Régularité de la réciproque

Proposition III.2. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et bijective. Si f est $\mathcal{C}^n$ et f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est $\mathcal{C}^n$ sur J .

IV. Fonctions à valeurs complexes

Définition IV.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a) \in \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Proposition IV.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est dérivable sur I ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables sur I .
On a alors : $(\operatorname{Re}(f))' = \operatorname{Re}(f')$ et $(\operatorname{Im}(f))' = \operatorname{Im}(f')$.

Remarque IV.1. Les propositions sur les sommes, produits, quotients de dérivées restent vraies pour les fonctions à valeurs complexes.

Le théorème de Rolle ne s'étend pas au cas des fonctions à valeurs complexes.

Proposition IV.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $|f'|$ est majorée par un réel M , alors f est M -lipschitzienne sur $[a, b]$.

V. Fonctions convexes

Lemme V.1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$. Alors $[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$.

Démonstration. • $\subset$: soit $z \in [x, y]$. Soit $t \in \mathbb{R} : z = tx + (1-t)y \iff t = \frac{z-y}{x-y}$. Posons donc $t = \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x}$. Comme $y \geq z$ et $y > x$, $t \geq 0$. Comme $z \geq x$, $-z \leq -x$, donc $y-z \leq y-x$ et $t \leq 1$. Donc $t \in [0, 1]$, et $z \in \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$.
• $\supset$: soit $z \in \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$. Il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = tx + (1-t)y$. Comme $x \leq y$ et $1-t \geq 0$, $(1-t)x \leq (1-t)y$ et $tx + (1-t)x \leq tx + (1-t)y$, donc $x \leq z$. Puis, $t \geq 0$, donc $tx \leq ty$, donc $tx + (1-t)y \leq ty + (1-t)y$ donc $z \leq y$. D'où $z \in [x, y]$.

Définition V.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est **convexe** sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

- On dit que f est **concave** sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Remarque V.1. f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Proposition V.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $a, b \in I$ avec $a < b$. Le graphe de f est situé en-dessous de sa sécante sur l'intervalle $[a, b]$ et au-dessus à l'extérieur.

Si de plus f est dérivable, alors le graphe de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration. La sécante a pour pente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ donc a une équation de la forme $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + p$. Comme le point $(a, f(a))$ est sur la sécante, on a $f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a + p$ donc $p = \frac{f(a)(b - a) - f(b)a + f(a)a}{b - a} = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$.

Soit (x, y) un point de la sécante : $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} = f(a)\frac{b - x}{b - a} + f(b)\frac{x - a}{b - a}$.

- Premier cas : $x \in [a, b]$. Il existe $t \in [0, 1]$ tel que $x = ta + (1 - t)b$. En isolant t , on a $t = \frac{x - b}{a - b} = \frac{b - x}{b - a}$ et $1 - t = \frac{x - a}{b - a}$. Donc $y = tf(a) + (1 - t)f(b) \geq f(ta + (1 - t)b) = f(x)$ par convexité. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de sa sécante sur $[a, b]$.

- Deuxième cas : $x \in [b, +\infty[\cap I$. Alors $b \in [a, x]$: il existe $t \in [0, 1]$ tel que $b = ta + (1 - t)x$. On trouve $t = \frac{x - b}{x - a}$ et $(1 - t) = \frac{b - a}{x - a}$. Par convexité $f(b) \leq tf(a) + (1 - t)f(x)$, donc $f(x) \geq \frac{f(b)}{1 - t} - \frac{tf(a)}{1 - t}$ ($1 - t > 0$ car $b > a$), puis $f(x) \geq \frac{x - a}{b - a}f(b) - \frac{x - b}{x - a}\frac{b - a}{b - a}f(a) = f(b)\frac{x - a}{b - a} + \frac{b - x}{b - a}f(a) = y$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa sécante sur $[b, +\infty[\cap I$.

- On procède de même sur $] -\infty, a] \cap I$.

Supposons maintenant que f est dérivable sur I . Soit $a \in I$ à l'intérieur de I (si a est une borne, on ne regarde que d'un côté de a).

Soit $x \in]a, +\infty[\cap I$ et soit $h > 0$ tel que $a < a + h < x$. D'après la première partie de la proposition, $\mathcal{C}$ est au-dessous de sa sécante sur $[a, x]$: $f(a + h) \leq f(a) + h\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Donc $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. En passant à la limite quand $h \rightarrow 0$: $f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, donc $f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a)$ (car $x - a > 0$) et $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente sur $]a, +\infty[\cap I$.

On procède de même si $x \in]-\infty, a[\cap I$: on prend $h < 0$ tel que $x < a + h < a$. On obtient $f(a + h) \leq f(a) + h\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ donc $\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ($h < 0$). On prend la limite quand $h \rightarrow 0$: $f'(a) \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, donc $f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a)$ ($x - a < 0$), et donc $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de sa tangente sur $]a, +\infty[\cap I$. $\square$

Théorème V.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0.$$

Exemples V.1. 1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive. Son graphe est donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, qui a pour équation $y = x + 1$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

2. La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée seconde est négative. Son graphe est au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$.